HEC 2006 S1

1 - *Exercice*

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.

On considère un endomorphisme u de E tel que :

$$u^2 - 2u + Id_E = 0$$

où $u^2 = u \circ u$.

1° *Question de Cours:* Enoncer le théorème du rang pour une application linéaire.

2° a) Montrer que u est un automorphisme de E.

b) Quelles sont les valeurs propres de u ?

c) A quelles conditions u est-il diagonalisable ?

d) Comparer $\operatorname{Im}(u - Id_E)$ et $\operatorname{Ker}(u - Id_E)$ et en déduire que $\dim \operatorname{Ker}(u - Id_E) \geqslant \dfrac{n}{2}$.

3° On suppose dans la suite de l'exercice que $\dim \operatorname{Ker}(u - Id_E) = n - 1$.

a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\operatorname{Im}(u - Id_E)$. Justifier l'existence de $n - 1$ vecteurs de E notés $e_2, \ldots, e_n$ tels que $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ soit une base de $\operatorname{Ker}(u - Id_E)$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.

b) Montrer alors que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.

4° a) Soit N la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en ligne 1 et colonne n qui est égal à 1. Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $MN = NM$.

b) On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$. Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et donner sa dimension en fonction de n.

2 - *Exercice sans préparation*

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n supérieur ou égal à λ, on considère la variable aléatoire $N_n = \dfrac{1}{n} \operatorname{Inf}\{i,\ X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i, $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre λ/n.
Etudier la convergence en loi de la suite $(N_n)_{n \geqslant \lambda}$.

HEC 2008 S1 Correction de l'exercice

Q1 f est une application linéaire de E dans E'.

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$.

Q2 a) $Id_E = 2u - u^2 = u \circ (2Id_E - u)$ et $Id_E = 2u - u^2 = (2Id_E - u) \circ u$.

ceci suffit pour dire que u est bijectif et que $u^{-1} = 2Id_E - u$.

Ainsi u est un automorphisme de E et $u^{-1} = 2Id_E - u$.

b) 1er cas.. $u = Id_E$. Alors $\operatorname{Sp} u = \{1\}$ et $SEP(u,1) = E$.

2ème cas.. $u \neq Id_E$. $u - Id_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. $\exists t \in E, (u - Id_E)(t) \neq 0_E$.

Comme $u \circ Id_E = Id_E \circ u$: $(u - Id_E)^2 = u^2 - 2u + Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Posons $x = (u - Id_E)(t)$. $x \neq 0_E$ et $(u - Id_E)(x) = (u - Id_E)^2(t) = 0_E$.

Donc $x \neq 0_E$ et $u(x) = x$. 1 est valeur propre de u. $1 \in \operatorname{Sp} u$.

$X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de u dont la seule racine est 1 alors $\operatorname{Sp} u \subset \{1\}$.

Finalement $\operatorname{Sp} u = \{1\}$ ... et dans les deux cas.

1 est la seule valeur propre de u.

c) $\operatorname{Sp} u = \{1\}$.

u est diagonalisable $\Leftrightarrow SEP(u,1) = E \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - Id_E) = E \Leftrightarrow u - Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Ainsi u est diagonalisable si et seulement si $u = Id_E$.

d) $\operatorname{Im}(u - Id_E) = \{(u - Id_E)(t), t \in E\}$.

$(u - Id_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\forall t \in E, (u - Id_E)\big((u - Id_E)(t)\big) = 0_E$.

$\forall t \in E, (u - Id_E)(t) \in \operatorname{Ker}(u - Id_E)$ donc $\operatorname{Im}(u - Id_E) \subset \operatorname{Ker}(u - Id_E)$.

Alors $\dim \operatorname{Im}(u - Id_E) \leq \dim \operatorname{Ker}(u - Id_E)$. En appliquant le théorème du rang à $u - Id_E$ il vient : $\dim E - \dim \operatorname{Ker}(u - Id_E) \leq \dim \operatorname{Ker}(u - Id_E)$.

R.

Alors $2 \dim Ker(u-Id_E) \geqslant \dim E = n$. Donc $\underline{\dim Ker(u-Id_E) \geqslant \frac{n}{2}}$.

(Q3) Ici $\dim Ker(u-Id_E) = n-1$

a) et b) Notons que $\dim Im(u-Id_E) = \dim E - \dim Ker(u-Id_E) = n-(n-1) = 1$.

Alors $Im(u-Id_E)$ est une droite vectorielle de E.

comme e_1 est un élément non nul de $Im(u-Id_E)$, e_1 est un élément non nul de $Ker(u-Id_E)$ car $Im(u-Id_E) \subset Ker(u-Id_E)$.

(e_1) est une famille libre de $Ker(u-Id_E)$ et $Ker(u-Id_E)$ est de dimension $n-1$.

le théorème de la base incomplète montre que l'on peut compléter la famille (e_1) (si nécessaire si $n \geqslant 3$) en une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de $Ker(u-Id_E)$.

Comme $e_1 \in Im(u-Id_E)$, il existe un vecteur e_n de E tel que $(u-Id_E)(e_n) = e_1$.

Alors $\underline{u(e_n) = e_1 + e_n}$. Posons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E. Comme E est de dimension n il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0_E$.

$\forall k \in [\![1, n-1]\!], e_k \in Ker(u-Id_E)$.

$$0_E = (u-Id_E)(0_E) = (u-Id_E)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (u-Id_E)(e_k) = \alpha_n (u-Id_E)(e_n) = \alpha_n e_1.$$

Alors $0_E = \alpha_n e_1$ et $e_1 \neq 0$. Ainsi $\alpha_n = 0$. Donc $0_E = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k e_k$.

La famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ étant libre : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$

Alors $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

ceci achève de montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et qu'ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E.

Il existe $n-1$ vecteurs $e_2, \dots, e_n$ de E tels que :
1) $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est une base de $Ker(u-Id_E)$
2) $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E
3) $u(e_n) = e_1 + e_n$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_k) = e_k$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$ donc

$$M_{(e_1, e_2, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q4) a) $N=(n_{i,j})$ avec $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]$, $n_{i,j}=\begin{cases}1 \text{ si } (i,j)=(1,n)\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Soit $M=(m_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Posons $P=MN=(p_{i,j})$ et $Q=NM=(q_{i,j})$

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $p_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j}=m_{i,1}n_{1,j}=\begin{cases}m_{i,1} \text{ si } j=n\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, $q_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} n_{i,k}m_{k,j}=n_{i,n}m_{n,j}=\begin{cases}m_{n,j} \text{ si } i=1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. Alors :

$MN=NM \iff \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]$, $p_{i,j}=q_{i,j}$

$MN=NM \iff \begin{cases}m_{1,1}=m_{n,n}\\ m_{i,1}=0 \text{ si } i\neq 1\\ m_{n,j}=0 \text{ si } j\neq n\\ 0=0 \text{ si } i\neq 1 \text{ et } j\neq n\end{cases} \iff \begin{cases}m_{1,1}=m_{n,n}\\ \forall i\in [\![2,n]\!],\ m_{i,1}=0\\ \forall j\in [\![1,n-1]\!],\ m_{n,j}=0\end{cases}$

<u>les matrices $M=(m_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $MN=NM$ sont les matrices $M=(m_{i,j})$ qui vérifient :</u>

$\begin{cases}m_{1,1}=m_{n,n}\\ \forall i\in [\![2,n]\!],\ m_{i,1}=0\\ \forall j\in [\![1,n-1]\!],\ m_{n,j}=0\end{cases}$.

- <u>Remarque</u> : ce sont donc toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont la première colonne est du type $\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et la $n^{\text{ème}}$ ligne du type $(0\ 0 \dots 0\ \alpha)$.

Soit $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. Reprenons $M=(m_{i,j})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

- Supposons que M commute avec N. Alors $m_{1,1}=m_{n,n}$, $\forall i\in [\![2,n]\!]$, $m_{i,1}=0$ et $\forall j\in [\![1,n-1]\!]$, $m_{n,j}=0$.

Ainsi $M=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}=m_{1,1}(E_{1,1}+E_{n,n})+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} m_{i,j}E_{i,j}$

• Réciproquement supposons que $M = m_{1,1}(E_{1,1}+E_{n,n}) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} m_{i,j} E_{i,j}$.

Comme $M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} E_{i,j}$ et que $(E_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ est libre :

$m_{1,1} = m_{n,n}$, $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $m_{i,1} = 0$ et $\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $m_{n,j} = 0$. Alors M commute avec N.

Ainsi <u>$\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille</u> $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant les familles $\mathcal{B}_1 = (E_{1,1}+E_{n,n})$ et la famille $\mathcal{B}_2 = (E_{i,j})_{1\le i\le n-1, 2\le j\le n-1}$. Notons que $\mathcal{B}$ est une famille libre.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $(\alpha_{i,j})_{1\le i\le n-1, 2\le j\le n-1}$ une famille de réels telle que :

$$\alpha(E_{1,1}+E_{n,n}) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0_{M_n(\mathbb{R})}.$$

Alors $\alpha E_{1,1} + \alpha E_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Comme $(E_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$ est libre on obtient $\alpha = 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n-1]\!]\times[\![2,n]\!]$, $\alpha_{i,j} = 0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Le cardinal de cette famille est $1 + (n-1)\times(n-1)$ c'est à dire $n^2 - 2n + 2$.

Résulte de tout ce qui précède que :

1) <u>$\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$</u> (car c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{B}$).

2) <u>$\mathcal{B}$ est une base de ce sous-espace vectoriel.</u>

3) <u>La dimension de ce sous-espace vectoriel est $n^2 - 2n + 2$.</u>

<u>b)</u> Rappelons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E telle que $\forall k \in [\![1,n-1]\!]$, $u(e_k) = e_k$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$. Notons que $M_{\mathcal{B}}(u) = I_n + N$.

Soit w l'endomorphisme de E de matrice N dans $\mathcal{B}$. $u = Id_E + w$.

Posons $\mathcal{C}(w) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid w \circ v = v \circ w\}$.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. $v \in \mathcal{C}(u) \Leftrightarrow u \circ v = v \circ u \Leftrightarrow (Id_E + w) \circ v = v \circ (Id_E + w)$

$v \in \mathcal{C}(u) \Leftrightarrow v + w \circ v = v + v \circ w \Leftrightarrow w \circ v = v \circ w \Leftrightarrow v \in \mathcal{C}(w)$.

Ainsi $\underline{\underline{\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(w)}}$. Montrons que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

- $\mathcal{C}(u) \subset \mathcal{L}(E)$
- $u \circ u = u \circ u$ donc $u \in \mathcal{C}(u)$. $\mathcal{C}(u)$ n'est pas vide.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(v_1, v_2) \in \mathcal{C}(u) \times \mathcal{C}(u)$.

  $u \circ (\lambda v_1 + v_2) = \lambda u \circ v_1 + u \circ v_2 \overset{\downarrow}{=} \lambda v_1 \circ u + v_2 \circ u = (\lambda v_1 + v_2) \circ u$; $\lambda v_1 + v_2 \in \mathcal{C}(u)$.

  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (v_1, v_2) \in \mathcal{C}(u) \times \mathcal{C}(u)$, $\lambda v_1 + v_2 \in \mathcal{C}(u)$.

  Ceci achève de montrer que $\underline{\underline{\mathcal{C}(u) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E)}}$.

  Alors il en est de même pour $\mathcal{C}(w)$!

  $\underline{\text{Posons } \mathcal{S} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}}$. Nous avons montré que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 2n + 2$.

  Montrons que $\mathcal{C}(w)$ est isomorphe à $\mathcal{S}$. Ainsi aurons-nous : $\dim \mathcal{C}(u) = \dim \mathcal{C}(w) = n^2 - 2n + 2$

  Posons $\forall v \in \mathcal{C}(w)$, $\varphi(v) = M_{\mathcal{B}}(v)$.

- Soit $v \in \mathcal{C}(w)$. $w \circ v = v \circ w$ donc $N M_{\mathcal{B}}(v) = M_{\mathcal{B}}(w) M_{\mathcal{B}}(v) = M_{\mathcal{B}}(w \circ v) \overset{v \in \mathcal{C}(w)}{=} M_{\mathcal{B}}(v \circ w) =$

  $M_{\mathcal{B}}(v) M_{\mathcal{B}}(w) = M_{\mathcal{B}}(v) N$. Alors $\varphi(v) = M_{\mathcal{B}}(v) \in \mathcal{S}$.

  $\underline{\underline{\varphi \text{ est une application de } \mathcal{C}(w) \text{ dans } \mathcal{S}}}$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (v_1, v_2) \in (\mathcal{C}(w))^2$, $\varphi(\lambda v_1 + v_2) = M_{\mathcal{B}}(\lambda v_1 + v_2) = \lambda M_{\mathcal{B}}(v_1) + M_{\mathcal{B}}(v_2) = \lambda \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$.

  $\underline{\underline{\varphi \text{ est linéaire}}}$.

- Soit $v \in \operatorname{Ker} \varphi$. $\varphi(v) = 0_{\mathcal{S}}$. $M_{\mathcal{B}}(v) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

  Ainsi $\operatorname{Ker} \varphi = \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$. $\underline{\varphi \text{ est injective}}$.

- Soit $M \in \mathcal{S}$. Soit v l'endomorphisme de E de matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

  $M_{\mathcal{B}}(w \circ v) = M_{\mathcal{B}}(w) M_{\mathcal{B}}(v) = NM \underset{M \in \mathcal{S}}{=} MN = M_{\mathcal{B}}(v) M_{\mathcal{B}}(w) = M_{\mathcal{B}}(v \circ w)$. $w \circ v = v \circ w$.

Alors $v \in \mathcal{B}(\omega)$ et $\varphi(v) = \pi_{\mathcal{B}}(v) = M$.

Donc tout élément de $\mathcal{S}$ possède un antécédent par φ dans $\mathcal{B}(\omega)$.

Ainsi φ est surjective.

Ceci achève de montrer que φ est un isomorphisme de $\mathcal{B}(\omega)$ sur $\mathcal{S}$.

Alors $\dim \mathcal{B}(u) = \dim \mathcal{B}(\omega) = \dim \mathcal{S} = n^2 - 2n + 2$.

$\mathcal{B}(u)$ est de dimension $n^2 - 2n + 2$ ou $(n-1)^2 + 1$.

R..

Question 1 HEC 2008 S1 $\boxed{\text{F1}}$

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit λ un réel strictement positif. Pour tout n strictement supérieur ou égal λ on considère la variable aléatoire $N_n = \dfrac{1}{n}\ \mathrm{Inf}\{i, X_{i,n} = 1\}$, où $(X_{i,n})_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telle que pour tout entier i $X_{i,n}$ suive une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}$.

Étudier la convergence en loi de la suite de terme général N_n.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Soit $n \in]\lambda,+\infty[\cap\mathbb{N}$. $nN_n = \mathrm{Inf}\{i\ ;\ X_{i,n}=1\}$. $(nN_n)(\Omega)=\mathbb{N}^*$. indépendance

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $P(nN_n=k) = P(\{X_{1,n}=0\}\cap\{X_{2,n}=0\}\cap\dots\{X_{k-1,n}=0\}\cap\{X_{k,n}=1\}) = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}\frac{\lambda}{n}$

$nN_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Notons F_n la fonction de répartition de N_n.

$\forall x\in]-\infty,\frac{1}{n}[$, $F_n(x)=0$. Nous retiendrons que $\forall x\in]-\infty,0]$, $F_n(x)=0$.

Soit $x\in[\frac{1}{n},+\infty[$. $F_n(x)=P(N_n\leq x)=P(nN_n\leq nx)=\displaystyle\sum_{1\leq k\leq nx}P(nN_n=k)=\sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)}P(nN_n=k)$

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{\mathrm{Ent}(nx)}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k-1}\frac{\lambda}{n}=\frac{\lambda}{n}\,\frac{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}}{1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}=1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}$$

Notons que si $x\in]0,\frac{1}{n}[$, $\mathrm{Ent}(nx)=0$ donc $F_n(x)=0$ et $1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}=0$.

Finalement $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ F_n(x)=\begin{cases}1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}}$.

$\forall x\in]-\infty,0]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}F_n(x)=0$. Soit $x\in]0,+\infty[$.

$\mathrm{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}(nx)\left(-\frac{\lambda}{n}\right)=-\lambda x$; $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\mathrm{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right)=-\lambda x$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\mathrm{Ent}(nx)}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-e^{\mathrm{Ent}(nx)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}\right)=1-e^{-\lambda x}.$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty}F_n(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\in]0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

<u>La suite de terme général N_n converge en loi vers une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ.</u>

R

SUJET N°3 HEC 2008 S3

■ 1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Rappeler la définition d'un vecteur propre, d'une valeur propre.
On note E l'espace vectoriel réel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On note Id_E, l'application identité de E. Soit Φ l'application définie sur E par

$$\Phi(f)(x) = f(x) + f'(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2° a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) La fonction non nulle $u \in E$ est un vecteur propre de Φ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(u) = \lambda u$. Déterminer les vecteurs propres de Φ.

c) Soit $f \in E$. Etablir la formule suivante

$$f(x) = f(0)\, e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t \left(f(t) + f'(t)\right) dt.$$

d) En déduire que l'endomorphisme Φ est surjectif.

e) Déterminer l'ensemble des fonctions f qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'égalité : $f(x) + f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3° On considère une fonction g de E qui admet une limite nulle en $+\infty$.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que g est bornée sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Prouver que la borne supérieure de l'ensemble $\Omega_a = \{|g(x)| \,/ x \in [a, +\infty[\}$ existe; dans la suite on note $h(a)$ cette borne supérieure.

b) Démontrer que $h(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$.

c) Justifier, en utilisant certaines des questions précédentes, l'existence d'une unique fonction $f \in E$ qui vérifie :

$$f(x) + f'(x) = g(x) \text{ et } f(0) = 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) Soit $a \in]0, +\infty[$ et $x > a$, établir l'inégalité suivante

$$\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)dt\right| \leqslant e^{a-x} h(0) + h(a).$$

En déduire que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

■ 2 - *Exercice sans préparation*

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat Pile ou Face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.
Pour tout n entier naturel non nul, on note P_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux Pile successifs.

1° Calculer P_1, P_2, P_3.

2° Trouver une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(P_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.

HEC 2008 S3 Correction de l'exercice

(Q1) * f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est valeur propre de f si $\mathrm{Ker}(f-\lambda Id_E) \neq \{0_E\}$ autrement dit s'il existe un élément x de E tel que : $x \neq 0_E$ et $f(x)=\lambda x$. x est alors un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

* A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est valeur propre de A s'il existe un élément X de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que :

$X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $AX=\lambda X$; X est alors un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

(ou λ est valeur propre de A si $A-\lambda I_n$ n'est pas inversible .)

(Q2) a) • Soit f un élément de E. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il en est donc de même pour f'. Ainsi $f+f'$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc $f+f'$ appartient à E.

$\forall f \in E,\ \phi(f) \in E$. ϕ est une application de E dans E.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E^2$.

$\phi(\lambda f+g) = \lambda f+g+(\lambda f+g)' = \lambda f+g+\lambda f'+g' = \lambda(f+f')+g+g' = \lambda\phi(f)+\phi(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \phi(\lambda f+g)=\lambda\phi(f)+\phi(g)$. ϕ est linéaire.

Ainsi ϕ est un endomorphisme de E.

b) Soit u un élément de E. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\phi(u)=\lambda u \iff u+u'=\lambda u \iff u'-(\lambda-1)u=0_E$. Or $x \mapsto (\lambda-1)x$ est une primitive de $x \mapsto \lambda-1$ sur $\mathbb{R}$. Le cours donne alors :

$\phi(u)=\lambda u \iff \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(x)=C\,e^{(\lambda-1)x}$.

Notons que pour tout c dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto e^{(\lambda-1)x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc appartient à E.

Ainsi λ est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto e^{(\lambda-1)x}$.

Ainsi 1) $\mathrm{Sp}\,\phi = \mathbb{R}$

2) Pour tout réel λ, $SEP(\phi,\lambda)$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction f_λ définie par : $\forall x\in\mathbb{R},\ f_\lambda(x)=e^{(\lambda-1)x}$. (*) 3°/ ↓

c) Soit f un élément de E. Posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $h_f(x)=e^x.f(x)$.

h_f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $h_f'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x(f(x)+f'(x))$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_0^x e^t(f(t)+f'(t))\,dt=\int_0^x h_f'(t)\,dt=h_f(x)-h_f(0)=e^x f(x)-e^0 f(0)$.

En multipliant par e^{-x} il vient : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}\int_0^x e^t(f(t)+f'(t))\,dt=f(x)-f(0)e^{-x}$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(0)\,e^{-x}+e^{-x}\int_0^x e^t(f(t)+f'(t))\,dt$ et ceci pour tout f dans E.

d) Soit g un élément de E. Ce qui précède nous incite à poser :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt$ et à montrer que : $f\in E$ et $\phi(f)=g$.

$t\mapsto e^t g(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. $x\mapsto\int_0^x e^t g(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car c'est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto e^x g(x)$ qui prend la valeur 0 en 0. Alors $f: x\mapsto e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi f appartient à E.

De plus $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt+e^{-x}(e^x g(x))=-f(x)+g(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f'(x)=g(x)$. Ainsi $\phi(f)=g$. f est alors un antécédent de g par ϕ dans E.

$\forall g\in E,\ \exists f\in E,\ \phi(f)=g$. ϕ est surjectif.

---

* 3°/ un élément u de E est vecteur propre de ϕ si et seulement si :
$\exists C\in\mathbb{R}^*,\ \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ u(x)=C\,e^{(\lambda-1)x}$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $L(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})$

$x \mapsto \frac{x}{2}$, $x \mapsto -\frac{x}{2}$ et $x \mapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto e^{\frac{x}{2}}$ et $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors L est un élément de E.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = L$. Montrons que $\mathcal{S}$ est contenu dans E. Soit $f \in \mathcal{S}$.

Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour cela montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- La propriété est vraie pour $n=1$ par définition de $\mathcal{S}$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$.

  $f \in \mathcal{S}$ donc $f + f' = L$. Alors $f' = L - f$. Comme L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que par hypothèse de récurrence f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, par différence f' est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors f est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

  Ceci achève la récurrence.

  Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc $f \in E$.

  Par conséquent $\underline{\mathcal{S} \subset E}$. Cherchons alors les éléments f de E tels que $f + f' = L$. Cela revient à chercher les éléments f de E tels que $\phi(f) = L$.

  Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}_L(x) = e^{-x}\int_0^x e^t L(t)\,dt$. Nous avons vu dans d) que $\phi(\hat{f}_L) = L$.

  Alors $\underline{\hat{f}_L \in \mathcal{S}.}$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\hat{f}_L(x) = e^{-x}\int_0^x e^t\left[\frac{1}{2}(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}})\right]dt = \frac{1}{2}e^{-x}\left[\int_0^x (e^{3t/2} + e^{t/2})\,dt\right] = \frac{1}{2}e^{-x}\left[\frac{2}{3}e^{3t/2} + 2e^{t/2}\right]_0^x$$

$$\hat{f}_L(x) = e^{-x}\left[\frac{1}{3}e^{3x/2} + e^{x/2} - \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{1}{3}e^{x/2} + e^{-x/2} - \frac{4}{3}e^{-x}.$$ $\underline{\underline{\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}_L(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} - \frac{4}{3}e^{-x}.}}$

Soit $f \in E$. $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \phi(f) = L \Leftrightarrow \phi(f) = \phi(\hat{f}_L) \Leftrightarrow \phi(f - \hat{f}_L) = 0_E \Leftrightarrow f - \hat{f}_L \in \operatorname{Ker}\phi$.

Rappelons que $Sp\,\phi = \mathbb{R}$ et que $\forall \lambda \in Sp\,\phi$, $SEP(\phi,\lambda) = Vect(f_\lambda)$ où f_λ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(x) = e^{(\lambda-1)x}$.

Alors $Ker\,\phi = SEP(\phi,0) = Vect(f_0)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{-x}$.

Donc $f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f - \hat{f}_L \in Vect(f_0) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$, $f - \hat{f}_L = c f_0 \Leftrightarrow f = \hat{f}_L + c f_0$.

$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} - \frac{4}{3} e^{-x} + c e^{-x}$.

$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} + d e^{-x}$ ($c \mapsto c - \frac{4}{3}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$).

<u>L'ensemble des fonctions f qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient l'égalité :</u>

<u>$f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ est : $\{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists d \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{3} e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} + d e^{-x}\}$.</u>

(Q3) Soit g une fonction de E de limite nulle en $+\infty$.

<u>a)</u> Soit $a \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > A_\varepsilon \Rightarrow |g(x)| < \varepsilon$.

En particulier $\exists A_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > A_1 \Rightarrow |g(x)| < 1$.

<u>1er cas..</u> $a > A_1$. $\forall x \in [a, +\infty[$, $|g(x)| < 1$.

Alors Ω_a est majorée par 1. Ainsi Ω_a est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Ω_a possède une borne supérieure.

<u>2ème cas..</u> $a < A_1$. g est continue sur le segment $[a, A_1]$ donc g est bornée sur ce segment. $\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, A_1]$, $|g(x)| \leq M$.

Alors $\forall x \in [a, +\infty[$, $|g(x)| \leq \max(1, M)$.

Ω_a est de nouveau une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Ω_a possède une borne supérieure.

<u>Pour tout a dans $\mathbb{R}$, Ω_a possède une borne supérieure que nous noterons $h(a)$.</u>

b) Notons en utilisant la définition que $\lim_{a\to+\infty} h(a)=0$.

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. $\exists A_\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x>A_\varepsilon \Rightarrow |g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ car $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Soit a un élément de $]A_\varepsilon,+\infty[$.

$\forall x\in\Omega_a$, $x\geqslant a$. Donc $\forall x\in\Omega_a$, $x>A_\varepsilon$. Alors $\forall x\in\Omega_a$, $|g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\frac{\varepsilon}{2}$ est un majorant de Ω_a. Alors $h(a)=\operatorname{Sup}\Omega_a\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\Omega_a\subset\mathbb{R}_+$, $h(a)\geqslant 0$. Alors $|h(a)|=h(a)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

Donc $\forall a\in]A_\varepsilon,+\infty[$, $|h(a)|<\varepsilon$.

$\forall a\in\mathbb{R}$, $a>A_\varepsilon\Rightarrow|h(a)|<\varepsilon$.

Donc $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\exists A_\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall a\in\mathbb{R}$, $a>A_\varepsilon\Rightarrow|h(a)|<\varepsilon$. Alors $\lim_{a\to+\infty}h(a)=0$.

c) vi Φ est surjective donc $\exists\hat{f}_g\in E$, $\Phi(\hat{f}_g)=g$.

Soit $f\in E$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f'(x)=g(x)$ et $f(0)=0$

$\Updownarrow$

$\Phi(f)=g$ et $f(0)=0$

$\Updownarrow$

$\Phi(f)=\Phi(\hat{f}_g)$ et $f(0)=0$

$\Updownarrow$

$\Phi(f-\hat{f}_g)=0_E$ et $f(0)=0$

$\Updownarrow$

$f-\hat{f}_g\in\operatorname{Ker}\Phi$ et $f(0)=0$

$\Updownarrow$

$\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $f-\hat{f}_g=\alpha f_0$ et $f(0)=0$ $\quad(\forall x\in\mathbb{R},\ f_0(x)=e^{-x})$.

$\Updownarrow$

$\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $f=\hat{f}_g+\alpha f_0$ et $\hat{f}_g(0)+\alpha f_0(0)=0$

$\Updownarrow$

$\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $f=\hat{f}_g+\alpha f_0$ et $\alpha=-\hat{f}_g(0)$ $\quad(f_0(0)=1)$.

$\Updownarrow$

$f=\hat{f}_g-\hat{f}_g(0)f_0$

Ainsi il existe une unique fonction f de E telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f'(x)=g(x)$ et $f(0)=0$

V2 Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt$. Nous avons vu dans d) que $f \in E$ et $\varphi(f) = g$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = g(x)$. De plus $f(0) = 0$.

Supposons que h soit une fonction de E telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) + h'(x) = g(x)$ et $h(0) = 0$.

Alors $\varphi(h) = g = \varphi(f)$. $\varphi(h-f) = 0_E$. $h - f \in \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}(f_0)$.

$\exists \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) - f(x) = \beta f_0(x) = \beta e^{-x}$.

Alors $\beta = \beta e^{-0} = h(0) - f(0) = 0 - 0 = 0$. $\beta = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) - f(x) = 0$. Ainsi $h = f$.

Donc $f : x \mapsto e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt$ est l'unique fonction de E qui vérifie :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f'(x) = g(x)$ et $f(0) = 0$.

a) Soit $a \in \,]0, +\infty[$. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

$$\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \underset{x \geq 0}{\leq} \int_0^x |e^{t-x} g(t)|\,dt = \int_0^x e^{t-x}|g(t)|\,dt = \int_0^a e^{t-x}|g(t)|\,dt + \int_a^x e^{t-x}|g(t)|\,dt.$$

$\forall t \in [0,a]$, $|g(t)| \leq h(0)$, $\forall t \in [a,x]$, $|g(t)| \leq h(a)$ et $\forall t \in [0,x]$, $e^{t-x} \geq 0$.

Alors $\forall t \in [0,a]$, $e^{t-x}|g(t)| \leq h(0)e^{t-x}$ et $\forall t \in [a,x]$, $e^{t-x}|g(t)| \leq h(a)e^{t-x}$.

Ainsi $\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \leq h(0)\int_0^a e^{t-x}\,dt + h(a)\int_a^x e^{t-x}\,dt$.

$$\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \leq h(0)\left[e^{t-x}\right]_0^a + h(a)\left[e^{t-x}\right]_a^x = h(0)\left(e^{a-x} - e^{-x}\right) + h(a)\left(1 - e^{a-x}\right).$$

Or $h(0) \geq 0$, $e^{a-x} - e^{-x} \leq e^{a-x}$, $h(a) \geq 0$ et $1 - e^{a-x} \leq 1$.

Donc $\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \leq h(0)e^{a-x} + h(a)$.

$\forall a \in \,]0,+\infty[$, $\forall x \in \,]a,+\infty[$. $\left|\int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt\right| \leq e^{a-x}h(0) + h(a)$.

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt = \int_0^x e^{t-x} g(t)\,dt$.

Alors $\forall a \in]0,+\infty[$, $\forall x \in]a,+\infty[$, $|f(x)| \leq e^{a-x} h(0) + h(a)$.

Montrons alors en utilisant la définition que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. $\lim_{a \to +\infty} h(a) = 0$ donc $\exists \beta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > \beta_\varepsilon \Rightarrow h(x) = |h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Prenons un élément a appartenant à $]\beta_\varepsilon, +\infty[$. Alors $h(a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

donc $\forall x \in]a,+\infty[$, $|f(x)| \leq e^{a-x} h(0) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{a-x} h(0)\right) = 0$. donc $\exists \gamma_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > \gamma_\varepsilon \Rightarrow e^{a-x} h(0) = |e^{a-x} h(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, x > a$ et $x > \gamma_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < e^{a-x} h(0) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $A_\varepsilon = \max(a, \gamma_\varepsilon)$. $\forall x \in \mathbb{R}, x > A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Notons que $A_\varepsilon > 0$.

Finalement $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, x > A_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Ainsi $\underline{\underline{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}}$.

R..

Question 3 **HEC 2008 S3** $\boxed{\textbf{F1}}$

On lance au hasard une pièce de monnaie équilibrée et on relève le résultat Pile ou Face. On suppose que cette expérience peut être réalisée autant de fois que nécessaire et que les résultats successifs sont mutuellement indépendants.

Pour tout n entier naturel non nul, on note P_n la probabilité qu'au cours de n lancers, on n'ait jamais obtenu deux Pile successifs.

Q1. Calculer P_1, P_2 et P_3.

Q2. Trouver une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2} pour tout n entier naturel non nul et prouver que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1.. Notons pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, F_i l'événement la pièce donne face au i^e lancer.

- $P_1 = 1$
- $P_2 = 1 - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
- $P_3 = 1 - P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3) - P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}) = 1 - 3 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

Q2. Notons S_n l'événement ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des n premiers lancers. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ est un système complet d'événements.

$$P(S_{n+2}) = P(F_1 \cap S_{n+2}) + P(P_1 \cap F_2 \cap S_{n+2}) + \underbrace{P(P_1 \cap P_2 \cap S_{n+2})}_{=0}.$$

$$P(S_{n+2}) = P(F_1) \underbrace{P_{F_1}(S_{n+2})}_{P(S_{n+1})} + P(P_1 \cap F_2) \underbrace{P_{P_1 \cap F_2}(S_{n+2})}_{P(S_n)} = \frac{1}{2} P(S_{n+1}) + \frac{1}{4} P(S_n)$$

$$\underline{\underline{P_{n+2} = \frac{1}{2} P_{n+1} + \frac{1}{4} P_n}}.$$ L'équation caractéristique associée à cette récurrence linéaire d'ordre 2 est $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - \frac{1}{2} z - \frac{1}{4} = 0$.

Ses deux racines sont : $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Notons que $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right| < 1$ et $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right| < 1$.

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 0$.

Exercice.. Notez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$

oui $n-1$!!

R

HEC 2008 S 6

SUJET N°6

1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Donner la définition et les propriétés des projecteurs.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n ($n \geqslant 2$). On considère un endomorphisme u de E vérifiant

$$u^2 - 2u + Id_E = 0.$$

2° a) Montrer que u est un automorphisme de E et préciser u^{-1}. Montrer que 1 est la seule valeur propre de u.

b) Montrer que $\operatorname{Im}(u - Id_E) \subset \operatorname{Ker}(u - Id_E)$ et en déduire que la dimension de $\operatorname{Ker}(u - Id_E)$ est supérieure ou égale à $n/2$.

3° Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer les équivalences suivantes :

- $p \circ q = p \Leftrightarrow \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$,
- $p \circ q = q \Leftrightarrow \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$,

4° Soit v un endomorphisme de E.

a) On suppose que $v^2 = 0$. Soient S un supplémentaire de $\operatorname{Im} v$ dans E et p la projection sur $\operatorname{Im} v$ parallèlement à S. On pose $q = p - v$. Montrer que q est un projecteur et que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

b) Montrer que $v^2 = 0$ si et seulement si il existe deux projecteurs p et q de E tels que $v = p - q$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

5° Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q_1 de E tels que $u = p + q_1$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q_1$.

2 - *Exercice sans préparation*

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit θ un réel strictement positif et pour tout réel $\lambda > 0$, X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda\theta$.

1° Montrer que $\dfrac{X_\lambda - \lambda\theta}{\lambda}$ converge en probabilité vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

2° En déduire pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} e^{-\lambda\theta} \sum_{k \leqslant \lambda x} \frac{(\lambda\theta)^k}{k!}$.

R.

HEC 2008 S 6 Correction de l'exercice.

(Q1) E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

- On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
  La projection sur F parallèlement à G est l'application p de E dans E qui à tout élément x de E s'écrivant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ associe y.
  → p est linéaire et vérifie $p \circ p = p$ donc p est un projecteur.
  → $\mathrm{Ker}\, p = G$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F$.
- Un projecteur p de E est la projection sur $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, p$.
- Les projecteurs de E sont les projections de E.

(Q2) a) $\mathrm{Id}_E = 2u - u^2 = u \circ (2\mathrm{Id}_E - u)$ et $\mathrm{Id}_E = 2u - u^2 = (2\mathrm{Id}_E - u) \circ u$.
ceci suffit pour dire que u est bijective et que $u^{-1} = 2\mathrm{Id}_E - u$.
Ainsi <u>u est un automorphisme de E et $u^{-1} = 2\mathrm{Id}_E - u$.</u>

$X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de u dont la seule racine est 1.
Ainsi $\mathrm{Sp}\, u \subset \{1\}$.

$u \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ u$ donc $(u - \mathrm{Id}_E)^2 = u^2 - 2u + \mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

<u>1er cas</u>. $u = \mathrm{Id}_E$. Alors 1 est valeur propre de u ! donc $\mathrm{Sp}\, u = \{1\}$.

<u>2ème cas</u>. $u \neq \mathrm{Id}_E$. $u - \mathrm{Id}_E \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Il existe alors un élément x de E tel que $(u - \mathrm{Id}_E)(x) \neq 0_E$. Posons $y = (u - \mathrm{Id}_E)(x)$.

$y \neq 0_E$ et $(u - \mathrm{Id}_E)(y) = (u - \mathrm{Id}_E)^2(x) = 0_E$. Ainsi $1 \in \mathrm{Sp}\, u$.

Donc ici encore $\mathrm{Sp}\, u = \{1\}$.

<u>1 est la seule valeur propre de u.</u>

b) $(u-Id_E)\circ(u-Id_E)=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $Im(u-Id_E)=\{(u-Id_E)(x)\,;\,x\in E\}$.

Alors $\forall x\in E$, $(u-Id_E)((u-Id_E)(x))=0_E$

donc $\forall y\in Im(u-Id_E)$, $(u-Id_E)(y)=0_E$.

Ainsi $\underline{Im(u-Id_E)\subset Ker(u-Id_E)}$.

Alors $\dim Im(u-Id_E)\leq \dim Ker(u-Id_E)$. le théorème du rang permet alors d'écrire que $\dim E-\dim Ker(u-Id_E)\leq \dim Ker(u-Id_E)$.

Par conséquent $2\dim Ker(u-Id_E)\geq \dim E=n$. $\dim Ker(u-Id_E)\geq n/2$.

Ainsi la dimension de $Ker(u-Id_E)$ est supérieure ou égale à $n/2$.

(Q3) • ▲ Supposons que $p\circ q=p$.

$\forall x\in Ker\,q$, $p(x)=p(q(x))=p(0_E)=0_E$. $\forall x\in Ker\,q$, $x\in Ker\,p$. $Ker\,q\subset Ker\,p$.

▲ Réciproquement supposons que $Ker\,q\subset Ker\,p$.

Soit $x\in E$. $\exists!(x_1,x_2)\in Im\,q\times Ker\,q$, $x=x_1+x_2$.

Notons que $x_1=q(x)$. Alors $x=q(x)+x_2$.

$p(x)=p(q(x))+p(x_2)=p(q(x))+0_E=p(q(x))$.

$\uparrow x_2\in Ker\,q$ et $Ker\,q\subset Ker\,p$

donc $\forall x\in E$, $p(q(x))=p(x)$; $p\circ q=p$.

Finalement $\underline{p\circ q=p \Leftrightarrow Ker\,q\subset Ker\,p}$. De même $\underline{q\circ p=q\Leftrightarrow Ker\,p\subset Ker\,q}$.

• ▲ Supposons que $p\circ q=q$. Rappelons que $Im\,p=Ker(p-Id_E)$.

$\forall x\in E$, $p(q(x))=q(x)$ donc $\forall x\in E$, $q(x)\in Ker(p-Id_E)$.

Alors $Im\,q\subset Ker(p-Id_E)$ donc $Im\,q\subset Im\,p$.

▲ Réciproquement supposons que $Im\,q\subset Im\,p$

$\forall y\in Im\,q$, $y\in Im\,p$. $\forall y\in Im\,q$, $y\in Ker(p-Id_E)$. $\forall y\in Im\,q$, $p(y)=y$.

Alors $\forall x\in E$, $p(q(x))=q(x)$; $p\circ q=q$.

Ainsi $p\circ q = q \iff \operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$. De même $q \circ p = p \iff \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$.

(Q4) a] • q est un endomorphisme de E comme différence de deux endomorphismes de E.

• $q\circ q = (p-v)\circ(p-v) = p^2 - p\circ v - v\circ p + v^2 = p - p\circ v - v\circ p$ car $p^2 = p$ et $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$. Alors $\forall y \in \operatorname{Im} v$, $p(y) = y$. Donc $\forall x \in E$, $p(v(x)) = v(x)$.

Ainsi $p\circ v = v$.

Soit $x \in E$. $p(x) \in \operatorname{Im} v$. $\exists t \in E$, $p(x) = v(t)$. Alors $v(p(x)) = v^2(t) = 0_E$.

$\forall x \in E$, $v(p(x)) = 0_E$. $v\circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $q\circ q = p - p\circ v - v\circ p = p - v - 0_{\mathcal{L}(E)} = q$.

$q \in \mathcal{L}(E)$ et $q\circ q = q$. q est un projecteur.

$p\circ q = p\circ(p-v) = p^2 - p\circ v = p - v = q$. $p\circ q = q$.

$q\circ p = (p-v)\circ p = p^2 - v\circ p = p - 0_{\mathcal{L}(E)} = p$. $q\circ p = p$.

p et q sont deux projecteurs tels que $p\circ q = q$ et $q\circ p = p$.

Alors Q3 donne $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$. Ainsi $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

Q b] * Nous venons de voir que si $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ alors il existe deux projecteurs p et q tels que $\begin{cases} q = p - v, \\ \text{et} \\ \operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q \end{cases}$ donc tels que $\begin{cases} v = p - q \\ \text{et} \\ \operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q \end{cases}$.

* Montrons la réciproque. Supposons qu'il existe deux projecteurs p et q de E tels que $\begin{cases} v = p - q \\ \text{et} \\ \operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q \end{cases}$. Montrons que $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Comme $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$ (resp. $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} p$) : $p\circ q = q$ (resp. $q\circ p = p$) d'après Q3.

Alors $v^2 = v\circ v = (p-q)\circ(p-q) = p^2 - p\circ q - q\circ p + q^2 = p - q - p + q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $v^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ si et seulement si il existe deux projecteurs p et q de E tels que $v = p - q$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q$.

(Q5) Rappelons que $(u-Id_E)^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors d'après Q4 il existe deux projecteurs p et q de E tels que $u - Id_E = p - q$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Im}\, q$.

$u = p + Id_E - q$. Posons $q_1 = Id_E - q$. $u = p + q_1$.

q est un projecteur ; q est encore la projection sur $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}(q - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, q$. Alors $q_1 = Id_E - q$ est la projection sur $\mathrm{Ker}\, q$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, q$.

Ainsi q_1 est un projecteur et $\mathrm{Ker}\, q_1 = \mathrm{Im}\, q = \mathrm{Im}\, p$.

Donc il existe deux projecteurs p et q_1 de E tels que $u = p + q_1$ et $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}\, q_1$.

Question 6 **HEC 2008 S6** **F1**

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit θ un réel strictement postif et pour tout n dans $\mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $n\,\theta$.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{X_n - n\,\theta}{n}$ converge en probabilité vers 0.

Q2. En désuire que pour x réel distinct de θ l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\,\theta}\sum_{k\leqslant n\,x}\frac{(n\,\theta)^k}{k!}\right)$.

Remarque : dans le texte initial il y avait un λ réel strictement positif à la place de n et on faisait tendre λ vers $+\infty$!!

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $T_n = \dfrac{X_n - n\theta}{n}$.

X_n possède une espérance et une variance qui valent $n\theta$.

Alors T_n possède une espérance et une variance. $E(T_n) = \frac{1}{n}\left(E(X_n) - n\theta\right) = 0$ et

$V(T_n) = \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{\theta}{n}$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$0 \leqslant P(|T_n - 0| \geqslant \varepsilon) = P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\theta}{n\varepsilon^2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta}{n\varepsilon^2} = 0$.

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(P(|T_n - 0| \geqslant \varepsilon)\right) = 0$ et ceci pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine nulle.

Q2 Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, la somme est nulle et la suite converge vers 0. Supposons que $x \in]0, +\infty[- \{\theta\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u_n = e^{-n\theta}\displaystyle\sum_{k\leqslant nx}\frac{(n\theta)^k}{k!}$.

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{E(nx)} P(X_n = k) = P(X_n \leqslant nx) = P\left(\frac{X_n - n\theta}{n} \leqslant x - \theta\right)$.

1er cas... $x - \theta < 0$. Alors $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \leqslant x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant \theta - x\right\}$

Alors $0 \leqslant u_n \leqslant P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant \theta - x\right)$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

2ème cas... $x - \theta > 0$ $\left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right\} \subset \left\{\dfrac{X_n - n\theta}{n} \geqslant x - \theta\right\} \subset \left\{\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant x - \theta\right\}$.

$0 \leqslant P\left(\dfrac{X_n - n\theta}{n} > x - \theta\right) = 1 - u_n \leqslant P\left(\left|\dfrac{X_n - n\theta}{n}\right| \geqslant x - \theta\right)$.

Par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(e^{-n\theta}\sum_{k\leqslant nx}\frac{(n\theta)^k}{k!}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > \theta \\ 0 \text{ si } x < \theta \end{cases}$

Exercice... Notez que cela donne la convergence en loi de $\left(\frac{X_n}{n}\right)$ vers θ.

1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Enoncer le théorème du rang.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie.

On définit u^n pour tout n entier naturel par : $u^0 = Id_E$ et pour $n \geqslant 1, u^n = u^{n-1} \circ u$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = \operatorname{Ker} u^n$, et $d_n = \dim K_n$; on note aussi $L_n = \operatorname{Im} u^n$.

2° Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion. Que dire de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n = d_{n+1} - d_n$. Montrer que K_{n+1} est l'image réciproque par u^n de $\operatorname{Ker} u$, et déterminer l'image directe de K_{n+1} par u^n. En déduire que $p_n = \dim(L_n \cap \operatorname{Ker} u)$, puis que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4° On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $K_n = K_N$.

5° On note $v = u \circ u$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $q_n = \dim(\operatorname{Ker} v^{n+1}) - \dim(\operatorname{Ker} v^n)$. Exprimer q_n en fonction des termes de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

6° Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et $v : E \to E$ l'endomorphisme défini, pour tout polynôme P, par :

$$v(P) = P(0)X^2 + P'(0).$$

Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'endomorphisme $u : E \to E$ tel que $v = u \circ u$.

2 - *Exercice sans préparation*

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère n variables aléatoires à densité, de même loi et indépendantes $X_1, \dots, X_n$. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $(Y_1(\omega), Y_2(\omega) \dots, Y_n(\omega))$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant. On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \dots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

1° Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\mathbb{P}([Y_k \leqslant x]) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j}.$$

2° En déduire que Y_k admet une densité qu'on explicitera sans signe $\sum$.

HEC 2008 S 7 Correction de l'exercice.

Q1 Soit g une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E_1 dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E_2.

$\dim E = \dim \operatorname{Ker} g + \dim \operatorname{Im} g = \dim \operatorname{Ker} g + \operatorname{rg} g$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Soit $x \in K_n$. $u^n(x) = 0_E$; $u^{n+1}(x) \underset{u^{n+1}=u\circ u^n}{=} u(0_E) = 0_E$; $x \in \operatorname{Ker} u^{n+1}$; $x \in K_{n+1}$
- Soit $x \in L_{n+1}$. $\exists t \in E$, $x = u^{n+1}(t)$; $x = u^n(u(t))$ donc $x \in \operatorname{Im} u^n$; $x \in L_n$.

$\forall x \in K_n$, $x \in K_{n+1}$ et $\forall x \in L_{n+1}$, $x \in L_n$. Alors $K_n \subset K_{n+1}$ et $L_{n+1} \subset L_n$.

Donc <u>la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.</u>

Q3 Soit $x \in E$

$x \in (u^n)^{-1}(\operatorname{Ker} u) \Leftrightarrow u^n(x) \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow u(u^n(x)) = 0_E \Leftrightarrow u^{n+1}(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in K_{n+1}$.

Ainsi <u>l'image réciproque par u^n de $\operatorname{Ker} u$ est K_{n+1}.</u>

Soit $x \in E$.

- Supposons que $x \in u^n(K_{n+1})$. $\exists t \in K_{n+1}$, $x = u^n(t)$.

  Alors $x \in \operatorname{Im} u^n$ et $u(x) = u^{n+1}(t) = 0_E$. Donc $x \in \operatorname{Im} u^n \cap \operatorname{Ker} u$. $x \in L_n \cap \operatorname{Ker} u$.
- Réciproquement soit $x \in L_n \cap \operatorname{Ker} u$. $\exists t \in E$, $x = u^n(t)$ et $u(x) = 0_E$.

  Alors $u^{n+1}(t) = u(u^n(t)) = u(x) = 0_E$. $t \in K_{n+1}$ et $x = u^n(t)$ donc $x \in u^n(K_{n+1})$.

  Finalement $u^n(K_{n+1}) = L_n \cap \operatorname{Ker} u$

<u>L'image directe de K_{n+1} par u^n est $L_n \cap \operatorname{Ker} u$.</u>

Soit f l'application de K_{n+1} dans E définie par $\forall x \in K_{n+1}$, $f(x) = u^n(x)$. Autrement dit

f est la restriction de u^n à K_{n+1}.

f est linéaire car u^n est linéaire.

$\operatorname{Ker} f = \{x \in K_{n+1} \mid f(x) = 0_E\} = \{x \in K_{n+1} \mid u^n(x) = 0_E\} = K_{n+1} \cap K_n \underset{K_n \subset K_{n+1}}{=} K_n$.

$\operatorname{Im} f = f(K_{n+1}) = u^n(K_{n+1}) = L_n \cap \operatorname{Ker} u$.

le théorème du rang appliqué à f donne :

$d_{n+1} = \dim K_{n+1} = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim K_n + \dim (L_n \cap \mathrm{Ker}\, u) = d_n + \dim (L_n \cap \mathrm{Ker}\, u)$.

Alors $p_n = d_{n+1} - d_n = \dim (L_n \cap \mathrm{Ker}\, u)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dim (L_n \cap \mathrm{Ker}\, u)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} \subset L_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} \cap \mathrm{Ker}\, u \subset L_n \cap \mathrm{Ker}\, u$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \dim (L_{n+1} \cap \mathrm{Ker}\, u) \leq \dim (L_n \cap \mathrm{Ker}\, u) = p_n$.

Ainsi la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q4 Supposons qu'il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

V1 → Montrons par récurrence que $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ K_n = K_N$ (méthode standard qui n'utilise pas Q3).

- La propriété est vraie pour $n = N$! $[\![N,+\infty[\![$
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![N,+\infty[\![$ et montrons-la pour $n+1$.
  L'hypothèse de récurrence indique que $K_n = K_N$. Montrons que $K_{n+1} = K_N$.
  - → $K_N = K_n \subset K_{n+1}$ donc $K_N \subset K_{n+1}$.
  - → Montrons que $K_{n+1} \subset K_N$. Soit $x \in K_{n+1}$. $u^n(u(x)) = u^{n+1}(x) = 0_E$.
    Alors $u(x) \in K_n$. Donc $u(x) \in K_N$. Ainsi $u^{N+1}(x) = u^N(u(x)) = 0_E$.
    Par conséquent $x \in K_{N+1}$. Or $K_{N+1} = K_N$ donc $x \in K_N$.
    $\forall x \in K_{n+1},\ x \in K_N$. $K_{n+1} \subset K_N$.

  Alors $K_{n+1} = K_N$ et la récurrence s'achève.

Si il existe un élément N de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$ alors $\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ K_n = K_N$.

V2 → On montre que $\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ K_n = K_N$ en utilisant la décroissance de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$K_N = K_{N+1}$. Alors $p_N = \dim K_{N+1} - \dim K_N = 0$.

Or la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ p_n \leq p_N = 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset K_{n+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = \dim K_n \leq \dim K_{n+1} = d_{n+1}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = d_{n+1} - d_n \geq 0$.

Ainsi $\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ 0 \leq p_n \leq 0$. $\forall n \in [\![N,+\infty[\![,\ p_n = 0$ ou $d_{n+1} = d_n$.

Soit $n \in [\![N, +\infty[\![$. $K_n \subset K_{n+1}$ et $\dim K_n = d_n = d_{n+1} = \dim K_{n+1}$. Alors $K_n = K_{n+1}$.

$\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $K_n = K_{n+1}$. Alors la suite $(K_n)_{n \in [\![N, +\infty[\![}$ est constante.

Ainsi $\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $K_n = K_N$.

Exercice 1.. Montrer qu'il existe un élément N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

2.. Montrer que si N appartient à $\mathbb{N}$ et si $K_N = K_{N+1}$ alors $\forall n \in [\![N, +\infty[\![$, $L_n = L_N$.

3.. Montrer que si N appartient à $\mathbb{N}$ et si $K_N = K_{N+1}$ alors $E = K_N \oplus L_N$.

Voir une correction à la fin.

(Q5) Soit $n \in \mathbb{N}$. $q_n = \dim \mathrm{Ker}\, v^{n+1} - \dim \mathrm{Ker}\, v^n = \dim \mathrm{Ker}\, u^{2n+2} - \dim \mathrm{Ker}\, u^{2n} = d_{2n+2} - d_{2n}$.

$q_n = d_{2n+2} - d_{2n+1} + d_{2n+1} - d_{2n} = p_{2n+1} + p_{2n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = p_{2n+1} + p_{2n}$.

(Q6) Soit $P \in E = \mathbb{R}_4[X]$. $P \in \mathrm{Ker}\, v \iff P(0)X^2 + P'(0) = 0_E \overset{(1, X^2) \text{ est libre}}{\iff} P(0) = P'(0) = 0$.

$P \in \mathrm{Ker}\, v \iff 0$ est une racine d'ordre au moins 2 de $P \iff X^2$ divise P.

$P \in \mathrm{Ker}\, v \iff \exists\, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $P = X^2 Q \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $P = X^2(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + cX$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Vect}(X^2, X^3, X^4)$. De plus (X, X^2, X^3) est une famille libre de E comme sous-famille de la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E. Donc $\dim \mathrm{Ker}\, v = 3$.

$\forall P \in E$, $v^2(P) = v(v(P)) = v(P'(0)X^2 + P'(0)) = P'(0)v(X^2) + v(P'(0))$.

$v(X^2) = 0$ car X^2 et sa dérivée s'annulent en 0. $v(P'(0)) = P'(0)X^2$ car $P'(0)$ est un polynôme constant.

Alors $\forall P \in E$, $v^2(P) = P'(0)X^2$. $\forall P \in E$, $P \in \mathrm{Ker}\, v^2 \iff P'(0) = 0$.

Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. $P' = 4aX^3 + 3bX^2 + 2cX + d$.

$P \in \mathrm{Ker}\, v^2 \iff P'(0) = 0 \iff d = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}\, v^2 = \{aX^4 + bX^3 + cX^2 + e \,;\, (a,b,c,e) \in \mathbb{R}^4\} = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^3, X^4)$.

$\dim \mathrm{Ker}\, v^2 = 4$ car $(1, X^2, X^3, X^4)$ est une famille libre comme sous-famille de la base canonique $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E

$\forall P \in E,\ v^3(P) = v(v^2(P)) = v(P'(0)X^2) = P'(0)v(X^2) = 0_E$. $v^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Ainsi $\dim \mathrm{Ker}\, v^3 = 5$.

Alors $q_0 = \dim \mathrm{Ker}\, v - \dim \mathrm{Ker}\, v^0 \underset{v^0 = Id_E}{=} 3 - 0 = 3$; $q_1 = \dim \mathrm{Ker}\, v^2 - \dim \mathrm{Ker}\, v = 4 - 3 = 1$ et

$q_2 = \dim \mathrm{Ker}\, v^3 - \dim \mathrm{Ker}\, v^2 = 5 - 4 = 1$.

Supposons qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $u^2 = v$ et reprenons les notations des questions précédentes.

$3 = q_0 = p_1 + p_0$; $1 = q_1 = p_3 + p_2$; $1 = q_2 = p_5 + p_4$.

Rappelons que $p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5$ d'après Q3.

$1 = p_3 + p_2 \geq 2p_3$. donc $p_3 \in \mathbb{N}$ et $p_3 \leq \frac{1}{2}$. Alors $p_3 = 0$. $0 = p_3 \geq p_4 \geq p_5 \geq 0$.

Par conséquent $p_4 = p_5 = 0$. donc $1 = q_2 = p_5 + p_4 = 0 + 0 = 0$!

Ainsi il n'existe pas d'endomorphisme u de E tel que $u^2 = v$.

Correction de l'exercice de la page 3.

1. Montrons qu'il existe un élément N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n \subset K_{n+1}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \dim K_n \leq \dim K_{n+1} = d_{n+1}$.

$(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Supposons qu'il n'existe pas N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ K_n \subsetneq K_{n+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \dim K_n < \dim K_{n+1} = d_{n+1}$.

Ainsi $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Notons que $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n < d_{n+1}$.

Posons $r = \dim E$. $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n \in [\![0, r]\!]$. Alors $d_0, d_1, \dots, d_{r+1}$ sont $r+2$ éléments distincts de $[\![0, r]\!]$ qui a pour cardinal $r+1$!!

Ainsi il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$.

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$. Alors $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ K_n = K_N$.

Montrons que $\forall n \in [\![N, +\infty[\![,\ L_n = L_N$.

Soit $n \in [\![N,+\infty[\![$. $K_n = K_N$ donc $\dim K_n = \dim K_N$.

Alors $\dim L_n = \dim E - \dim K_n = \dim E - \dim K_N = \dim L_N$. $\underline{\dim L_n = \dim L_N}$.

De plus $\underline{L_n \subset L_N}$ car la suite $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Ainsi $L_n = L_N$.

<u>S'il existe un élément N de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$ alors $\forall n \in [\![N,+\infty[\![$, $L_n = L_N$.</u>

3.. Soit N un élément de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$. Montrons que $E = K_N \oplus L_N$.

. D'abord $\dim K_N + \dim L_N = \dim \operatorname{Ker} u^N + \dim \operatorname{Im} u^N = \dim E$.

. Soit x un élément de $K_N \cap L_N$. $x \in \operatorname{Ker} u^N \cap \operatorname{Im} u^N$.

$\exists t \in E$, $x = u^N(t)$ et $u^N(x) = 0_E$. Alors $u^{2N}(t) = u^N(x) = 0_E$. $t \in \operatorname{Ker} u^{2N}$.

donc $t \in K_{2N}$.

Or $K_N = K_{N+1}$ donc $\forall n \in [\![N,+\infty[\![$, $K_n = K_N$.

$2N \geqslant N$ donc $K_{2N} = K_N$. Alors $t \in K_N$. Ainsi $x = u^N(t) = 0_E$.

Donc $K_N \cap L_N = \{0_E\}$.

Ceci achève de montrer que K_N et L_N sont supplémentaires.

<u>Si N est un élément de $\mathbb{N}$ tel que $K_N = K_{N+1}$: $E = K_N \oplus L_N$.</u>

Question 7 HEC 2008 S7 $\boxed{\text{F2}}$

Les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On considère n variable aléatoires à densité, de même loi que et indépendantes X_1, X_2, ..., X_n. On note F la fonction de répartition et f une densité des X_i.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\big(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\big)$ la suite des $X_i(\omega)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ réordonnés par ordre croissant.

On a donc $Y_1(\omega) \leqslant Y_2(\omega) \leqslant \cdots \leqslant Y_n(\omega)$ pour tout ω de Ω.

Q1. Si $1 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $P(Y_k \leqslant x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j \, (1 - F(x))^{n-j}$.

Q2. En déduire que Y_k admet une densité que l'on explicitera sans signe $\sum$.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons T_x le nombre de variables aléatoires X_i ayant des valeurs inférieures à x. $T_x \hookrightarrow \mathcal{B}(n, F(x))$.

Alors $P(Y_k \leqslant x) = P(T_x \geqslant k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j}$.

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(Y_k \leqslant x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j}.$$

Q2 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Notons F_k la fonction de répartition de Y_k. $F_k = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j (1-F)^{n-j}$.

* F est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_k est continue sur $\mathbb{R}$.

* f est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ où D est une partie finie de $\mathbb{R}$. Alors F est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R} \setminus D$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus D$, $F'(x) = f(x)$.

Ainsi F_k est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus D$. Ceci achève de montrer que <u>Y_k est une variable aléatoire à densité</u>.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus D,\ F_k'(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j\, f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (n-j) f(x) (1-F(x))^{n-j-1}$$

Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j\, f(x) (F(x))^{j-1} (1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (F(x))^j (n-j) f(x) (1-F(x))^{n-j-1}$

f_k est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F_k' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Alors <u>f_k est une densité de Y_k</u> qu'il convient de simplifier.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Effectuons le changement d'indice $j \leftarrow j-1$ dans la seconde somme.

R

ou n !!

$$f_k(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} j\, f(x)(F(x))^{j-1}(1-F(x))^{n-j} - \sum_{j=k+1}^{n+1} \binom{n}{j-1} (F(x))^{j-1}(n-j+1)\, f(x)\,(1-F(x))^{n-j}$$

$$f_k(x) = \binom{n}{k} k\, f(x)(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k} + \sum_{j=k+1}^{n} f(x)\, F(x)^{j-1}(1-F(x))^{n-j} \underbrace{\left[j\binom{n}{j} - (n-j+1)\binom{n}{j-1} \right]}_{\alpha_j}$$

Soit $j \in [\![k+1, n]\!]$.

$$\alpha_j = j\,\frac{n!}{j!(n-j)!} - (n-j+1)\,\frac{n!}{(n-j+1)!\,(j-1)!} = \frac{n!}{(j-1)!\,(n-j)!} - \frac{n!}{(n-j)!\,(j-1)!} = 0.$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = k\binom{n}{k} f(x)\,(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}.$

Remarque : Si la loi des X_i est uniforme sur $[0,1]$, Y_k suit une loi bêta de première espèce.

HEC 2008 S 8

1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Donner la définition d'une fonction f convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle de $\mathbb{R}$.

Lors d'une soirée, n amis ($n \geqslant 2$) jouent au jeu suivant. Chacun met un euro sur la table et inscrit pile ou face sur un papier sans que les autres puissent connaître son choix. Un serveur lance ensuite une pièce équilibrée. La somme de n euros est partagée (théoriquement sous forme fractionnaire) entre les gagnants (ceux qui ont fait le bon choix). S'il n'y a pas de gagnant, on donne la somme totale au serveur en guise de pourboire.

2° Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on note X_k la somme aléatoire que reçoit le joueur k. Calculer l'espérance de X_k.

3° Dans cette question, on suppose qu'une nouvelle personne arrive avant que la pièce ne soit lancée. On demande à un joueur s'il accepte que cette nouvelle personne participe au jeu.
Que doit répondre ce joueur s'il veut maximiser le gain espéré ?
Quel doit être l'avis du serveur si il veut maximiser le pourboire espéré ?

4° Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, pour tout n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de points de I et tout n-uplet $(t_1, ..., t_n)$ de réels positifs tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :

$$f(t_1x_1 + ... + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + ... + t_nf(x_n).$$

b) Soit X une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contenues dans I. Montrer que :

$$f(E(X)) \leqslant E(f(X)).$$

5° On se place à nouveau dans un jeu à n joueurs.

a) Calculer $E(X_k^2)$ sous forme d'une somme finie.

b) Montrer que :

$$E(X_k^2) \geqslant \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

2 - *Exercice sans préparation*

1° Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \longmapsto (1+x)^{1/2}$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0. On note $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ la partie régulière de ce développement limité.

2° Montrer que $P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.

3° Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0$.
Montrer que l'équation $B^2 = I_n + A$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n) admet au moins une solution.

R.

HEC 2008 S8 Correction de l'exercice

(Q1) I est un intervalle non vide et non réduit à un point. f est une application de I dans $\mathbb{R}$.
f est convexe sur I si $\forall \lambda \in [0,1], \forall (x,y) \in I^2, f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.

(Q2) Posons $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

$S_n(\Omega) = \{0, n\}$. $(S_n = 0)$ se réalise si et seulement si tous les joueurs perdent.
Un joueur perd avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et les joueurs jouent de manière indépendante.

Ainsi $P(S_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Alors $P(S_n = n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Donc S_n possède une espérance qui vaut $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires finies ayant même loi.
Donc leurs espérances existent et sont égales.
Par conséquent $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = nE(X_k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Alors $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{n}\, n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $E(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

▲ Exercice.. Retrouver ce résultat en trouvant la loi de X_k.
($X_k(\Omega) = \left\{ \frac{n}{i} ; i \in [\![1,n]\!] \right\} \cup \{0\}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X_k = \frac{n}{i}) = \binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et
$P(X_k = 0) = \frac{1}{2}$). Voir une solution dans Q 5 a) ! ▼

(Q3) • $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Ainsi un joueur augmente son gain espéré si une personne supplémentaire joue.
Un joueur doit donc accepter qu'une nouvelle personne participe au jeu pour maximiser son gain espéré.

La probabilité pour que le serveur touche un pourboire est la probabilité pour que les n joueurs perdent c'est donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Notons T_n la variable aléatoire égale au gain du joueur.

$T_n(\Omega) = \{0, n\}$. $P(T_n = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $P(T_n = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Alors $E(T_n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^n}$.

$$\frac{E(T_{n+1})}{E(T_n)} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{\text{si } n \geqslant 2\,!}{<} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right) = 1.$$

Notons que si $n \geqslant 2$ $\quad \frac{E(T_{n+1})}{E(T_n)} \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} < 1$ ... et $E(T_n) > 0$

la suite $(E(T_n))_{n \geqslant 1}$ est décroissante et la suite $(E(T_n))_{n \geqslant 2}$ est strictement décroissante.

De toute évidence le joueur a intérêt à refuser l'arrivée d'un nouveau joueur.

Q4 a) Montrons le résultat par récurrence sur n.

- Soit $(x_1, x_2) \in I^2$. Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{i=1}^{2} t_i = 1$.

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \underset{t_1+t_2=1}{=} f(t_1 x_1 + (1-t_1) x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + (1-t_1) f(x_2) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2).$$

f est convexe sur I, $t_1 \in [0,1]$, $(x_1, x_2) \in I^2$.

$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall (t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sum_{i=1}^{2} t_i = 1 \Rightarrow f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$.

La propriété est vraie pour $n = 2$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $[\![2, +\infty[\![$ et montrons la pour $n+1$.

  Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$. Soit $(t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$

  Posons $\lambda = \sum_{i=1}^{n} t_i$. Alors $1 - \lambda = t_{n+1}$ et $\lambda \in [0, 1]$.

1er cas.. $\lambda = 0$. Comme $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $t_i \geqslant 0$ alors $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$ et $t_{n+1} = 1$.

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{n+1} x_{n+1}) = f(x_{n+1}) = t_1 f(x_1) + \dots + t_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Donc $f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_{n+1} x_{n+1}) \leqslant t_1 f(x_1) + \dots + t_{n+1} f(x_{n+1})$.

<u>2ième cas</u>.. $\lambda \neq 0$. Alors $\lambda > 0$. Posons $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t'_i = \frac{t_i}{\lambda}$.

$t'_1 \geq 0, t'_2 \geq 0, \dots, t'_n \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} t'_i = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{\lambda}\lambda = 1$.

$f(t_1x_1+\dots+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}) = f\left(\lambda\left(\frac{t_1}{\lambda}x_1+\dots+\frac{t_n}{\lambda}x_n\right)+t_{n+1}x_{n+1}\right)$.

$f(t_1x_1+\dots+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}) = f\left(\lambda(t'_1x_1+\dots+t'_nx_n)+(1-\lambda)x_{n+1}\right)$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \in I$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t'_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} t'_i = 1$. Alors, comme I est un intervalle $t'_1x_1+t'_2x_2+\dots+t'_nx_n \in I$. Comme $\lambda \in [0,1]$ et $x_{n+1} \in I$:

$f(t_1x_1+\dots+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ est convexe}}}{\leq} \lambda f(t'_1x_1+\dots+t'_nx_n)+(1-\lambda)f(x_{n+1})$.

$(x_1,x_2,\dots,x_n) \in I^n$, $(t'_1,t'_2,\dots,t'_n) \in [0,1]^n$ et $\sum_{i=1}^{n} t'_i = 1$. Alors l'hypothèse de récurrence donne $f(t'_1x_1+\dots+t'_nx_n) \leq t'_1f(x_1)+\dots+t'_nf(x_n)$. Comme $\lambda \geq 0$:

$f(t_1x_1+\dots+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}) \leq \lambda(t'_1f(x_1)+\dots+t'_nf(x_n))+(1-\lambda)f(x_{n+1})$.

Rappelons que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t'_i = \frac{t_i}{\lambda}$ et $1-\lambda = t_{n+1}$.

Ainsi $f(t_1x_1+\dots+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}) \leq t_1f(x_1)+\dots+t_nf(x_n)+t_{n+1}f(x_{n+1})$.

$\forall (x_1,x_2,\dots,x_{n+1}) \in I^{n+1}$, $\forall (t_1,t_2,\dots,t_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$, $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \Rightarrow f(t_1x_1+\dots+t_{n+1}x_{n+1}) \leq t_1f(x_1)+\dots+t_{n+1}f(x_{n+1})$.

Donc la propriété est vraie pour $n+1$ et la récurrence s'achève.

<u>$\forall (x_1,x_2,\dots,x_n) \in I^n$, $\forall (t_1,t_2,\dots,t_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, $f(t_1x_1+t_2x_2+\dots+t_nx_n) \leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\dots+t_nf(x_n)$</u>

▲<u>Remarque</u>.. Il aurait sans doute été plus élégant de mettre dans la propriété de récurrence l'appartenance de $t_1x_1+\dots+t_nx_n$ à I ... ▼

b) Supposons que $X(\Omega) = \{x_1,x_2,\dots,x_r\}$ avec pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $x_i \in I$.

Posons $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $t_i = P(X=x_i)$. $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $t_i \in \mathbb{R}^+$ et $\sum_{i=1}^{r} t_i = 1$.

Alors $f(t_1x_1+t_2x_2+\dots+t_rx_r) \leq t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\dots+t_rf(x_r)$

donc $f(x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+\dots+x_rP(X=x_r)) \le f(x_1)P(X=x_1)+f(x_2)P(X=x_2)+\dots+f(x_r)P(X=x_r)$

Or $x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+\dots+x_rP(X=x_r)=E(X)$ et, grâce au théorème de transfert $f(x_1)P(X=x_1)+f(x_2)P(X=x_2)+\dots+f(x_r)P(X=x_r)=E(f(X))$ (notons que $X(\Omega)\subset I$ et f est définie sur I). Alors $f(E(X))\le E(f(X))$.

<u>Si X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs contenues dans I :</u>

<u>$f(E(X))\le E(f(X))$.</u>

Q5 <u>a)</u> Soit $k\in [\![1,n]\!]$. Cherchons la loi de X_k !

$X_k(\Omega)=\{0\}\cup\{\frac{n}{i}\ ;\ i\in[\![1,n]\!]\}$.

Le joueur k ne gagne rien avec la probabilité $\frac{1}{2}$. <u>$P(X_k=0)=\frac{1}{2}$.</u>

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Notons B la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant un numéro différent de k qui sont gagnants. B suit la loi binomiale de paramètres $n-1$ et $\frac{1}{2}$. Notons enfin G_k l'événement le joueur numéro k gagne.

$$P\left(X_k=\frac{n}{i}\right)=P(G_k\cap(B=i-1)) \overset{\text{par indépendance}}{=} P(G_k)P(B=i-1)=\frac{1}{2}\times\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Ainsi $P(X_k=0)=\frac{1}{2}$ et <u>$\forall i\in[\![1,n]\!],\ P\left(X_k=\frac{n}{i}\right)=\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$</u>

Alors $E(X_k^2)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}\right)^2 P\left(X_k=\frac{n}{i}\right)+0^2P(X_k=0)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}\right)^2\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}=\binom{n}{i}$.

$$E(X_k^2)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\underline{E(X_k^2)=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

On a également $\underline{E(X_k^2)=n^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=n^2\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$$E(X_k^2)=\frac{n^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

b) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n-1$ et $\frac{1}{2}$.

Posons $I=[0,+\infty[$ et $\forall x\in I,\ g(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$.

g est de classe C^∞ sur I. $\forall x\in I,\ g(x)=(x+1)^{-2}$, $g'(x)=-2(x+1)^{-3}$ et $g''(x)=6(x+1)^{-4}$.

$\forall x\in I,\ g''(x)\geqslant 0$. g est convexe sur I et U prend un nombre fini de valeurs dans I.

Ainsi $g(E(U))\leqslant E(g(U))$.

$E(U)=(n-1)\times\frac{1}{2}$. $g(E(U))=\frac{1}{\left((n-1)\times\frac{1}{2}+1\right)^2}=\frac{4}{(n+1)^2}$.

Donc $\frac{4}{(n+1)^2}=g(E(U))\leqslant E(g(U))\underset{\text{théorème de transfert}}{=}\sum_{i=0}^{n-1}g(i)\,P(U=i)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Alors $\frac{4}{(n+1)^2}\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{n^2}E(X_k^2)$.

Donc $E(X_k^2)\geqslant\frac{n^2}{2}\times\frac{4}{(n+1)^2}=\frac{2n^2}{(n+1)^2}$.

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\quad E(X_k^2)\geqslant\frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

Question 8 **HEC 2008 S8** $\boxed{\text{F2}}$

Q1. $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $x \to (1+x)^{1/2}$ admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0. On note P la partie régulière de ce développement limité.

Q2. Montrer que $P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.

Q3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est à dire : $\exists k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 0$.

Montrer que l'équation $B^2 = I_n + A$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (I_n désigne la matrice identité d'ordre n) admet au moins une solution.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

Q1 $f : x \mapsto (1+x)^{1/2}$ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ donc admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0.

Q2 $\exists \alpha \in]0,1[,\ \exists \varepsilon \in \mathcal{F}(]-\alpha,\alpha[,\mathbb{R}),\ f(x) = P(x) + x^p\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Version 1

Posons $Q = P^2 - X - 1$.

$1 + x = (f(x))^2 = (P(x))^2 + 2P(x)\,\varepsilon(x)\,x^p + (\varepsilon(x)\,x^p)^2$.

$Q(x) = P^2(x) - x - 1 = -2P(x)\,\varepsilon(x)\,x^p - x^{2p}(\varepsilon(x))^2$. $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$

Alors $\lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{x^p} = \lim_{x\to 0}\left(-2P(x)\,\varepsilon(x) - x^p(\varepsilon(x))^2\right) = 0$.

$\deg Q \leqslant 2p$. $Q = \sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$. Supposons que $\{i \in [\![0,p]\!] \mid a_i \neq 0\}$ soit non vide et notons r son plus petit élément. $r \in [\![0,p]\!]$, $a_r \neq 0$ et $Q = \sum_{k=r}^{2p} a_k X^k$.

Alors $Q(x) \underset{0}{\sim} a_r x^r$; $\frac{Q(x)}{x^p} \underset{0}{\sim} a_r x^{r-p}$. $\left|\frac{Q(x)}{x^p}\right| \underset{0}{\sim} |a_r|\,|x|^{r-p}$.

Or $\lim_{x\to 0}\left|\frac{Q(x)}{x^p}\right| = 0$ et $\lim_{x\to 0^+}\left(|a_r|\,|x|^{r-p}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r<p \\ |a_r| & \text{si } r=p \end{cases}$ $(|a_r| > 0)$.

ce qui est contradictoire. Donc $\{i \in [\![0,p]\!] \mid a_i \neq 0\} = \emptyset$.

Alors $Q = \sum_{k=p+1}^{2p} a_k X^k$. <u>$P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.</u> <u>Version 2</u> →

Q3 Soit T la partie régulière du développement limité d'ordre k au voisinage de 0 de $x \mapsto (1+x)^{1/2}$. $T^2 - X - 1$ est divisible par X^{k+1}.

$\exists H \in \mathbb{R}[X]$, $T^2 - X - 1 = X^{k+1}H$. Alors $T^2(A) - A - I_n = A^{k+1}H(A) = 0$.

$(T(A))^2 = I_n + A$. L'équation en $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B^2 = I_n + A$ admet au moins une solution.

R..

(Q2) <u>version 2</u>. $\deg P^2 \leq 2p$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p+1}$, $P^2 = \sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$. Posons $S = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$

$(1+x)^{1/2} \underset{x \mapsto 0}{=} P(x) + o(x^p)$

Donc $1+x \underset{x \mapsto 0}{=} S(x) + o(x^p)$ (règles de calcul du produit de deux développements limités d'ordre p au voisinage de 0).

De plus $P^2(x) \underset{x \mapsto 0}{=} S(x) + o(x^p)$.

Alors $P^2(x) - 1 - x \underset{x \mapsto 0}{=} S(x) - S(x) + o(x^p) \underset{x \mapsto 0}{=} o(x^p)$.

Ainsi $P^2(x) - 1 - x \underset{x \mapsto 0}{=} o(x^p)$. La partie régulière du développement limité de $x \to P^2(x) - 1 - x$ à l'ordre p en 0 est nulle. De plus :

$\deg P^2 - 1 - X \leq 2p$. $\exists (b_0, b_1, \dots, b_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p+1}$, $P^2 - 1 - X = \sum_{k=0}^{2p} b_k X^k$.

Alors $P^2(x) - 1 - x = \sum_{k=0}^{p} b_k x^k + o(x^p)$. La partie régulière du développement limité de $x \mapsto P^2(x) - 1 - x$ à l'ordre p en 0 est $\sum_{k=0}^{p} b_k X^k$.

Par unicité du développement limité de $x \mapsto P^2(x) - 1 - x$ à l'ordre p en 0 il vient $\sum_{k=0}^{p} b_k X^k = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $b_0 = b_1 = \dots = b_p = 0$. Donc $P^2 - 1 - X = \sum_{k=p+1}^{2p} b_k X^k = X^{p+1} \sum_{k=p+1}^{2p} b_k X^{k-p-1}$

Donc $P^2 - 1 - X$ est divisible par X^{p+1} ... ou <u>$P^2 - X - 1$ est divisible par X^{p+1}.</u>

HEC 2008 S 9

■ 1 - *Exercice*

1° *Question de Cours:* Définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme f. Lien entre valeurs propres de f et racines d'un polynôme annulateur de f.

Soit $n \geqslant 2$ un entier et λ un réel. On définit l'application :

$$f_\lambda : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) , \qquad A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

2° a) f_λ est-il injectif? surjectif?

b) Déterminer $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f_\lambda(A) = \lambda U + f_0(A)$.

c) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n+1$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda[\mathcal{M}_n(\mathbb{R})] \subset \mathcal{F}$.

d) Déterminer $f_\lambda \circ f_\lambda$.

e) Pour quelle(s) valeur(s) de λ, f_λ est-il un endomorphisme? Dans ce cas, f_λ est-il diagonalisable?

3° Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $f_\lambda(A)$ soit diagonalisable.

4° a) Montrer que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a :

$$f_0(A).U = 0 \quad \text{et} \quad f_0(AB) = A\, f_0(B) .$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer l'équivalence :

$$f_\lambda(A).f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \Leftrightarrow A.f_0(B) = f_\lambda(A).f_0(B) .$$

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) , \quad f_\lambda(A).f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) .$$

■ 2 - *Exercice sans préparation*

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $]0, 1]$, et $q \in]0, 1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor ,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

HEC 2008 S9 Correction de l'exercice

Q1 f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $P=\sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

- P est un polynôme annulateur de f si $P(f)=0_{\mathcal{L}(E)}$ donc si $\sum_{k=0}^{r} a_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- Si P est un polynôme annulateur de f, l'ensemble des valeurs propres de f est <u>CONTENU</u> dans l'ensemble des racines de P.

Q2 a) Soit $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f_\lambda(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = f_\lambda(E_{2,1})$$ et $E_{1,2} \neq E_{2,1}$ donc <u>f_λ n'est pas injective.</u>

$E_{1,2}$ a pour coefficient situé à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne : 1. Alors $E_{1,2}$ ne peut pas être l'image par f_λ d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>f_λ n'est pas surjective.</u>

b) Soit $A=(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$f_\lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0\end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} 0_{n,n-1} & \begin{matrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \\ a_{n,n}\end{matrix}\end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \end{array}\right) + f_0(A).$$

<u>Ainsi $U = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 0 \end{array}\right)$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_\lambda(A) = \lambda U + f_0(A)$.</u>

<u>Remarque</u> : $U = E_{1,1}+E_{2,2}+\cdots+E_{n-1,n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k}$

c) Soit $A=(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$f_\lambda(A) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda E_{k,k} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} E_{i,n} = \lambda \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} E_{i,n} = \lambda U + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} E_{i,n}.$$

Posons $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(U, E_{1,n}, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$. $f_\lambda(A) \in \mathcal{H}$ et ceci pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient $f_\lambda(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Montrons que $\dim \mathcal{H} = n+1$. Il suffit de montrer que $\mathcal{B} = (U, E_{1,n}, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\alpha_0 U + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, E_{i,n} = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Donc $\alpha_0 \sum_{k=1}^{n-1} E_{k,k} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, E_{i,n} = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_0 E_{k,k} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, E_{i,n} = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Or la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est libre.

Ainsi $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Donc $\mathcal{B} = (U, E_{1,n}, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$ est libre.

Alors dim $\mathcal{H} = n+1$.

<u>$\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(U, E_{1,n}, E_{2,n}, \dots, E_{n,n})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n+1$ tel que, pour tout λ dans $\mathbb{R}$, $f_\lambda(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subset \mathcal{H}$.</u> <u>Exercice.</u> Montrer que $f_\lambda(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{H}$.

<u>d)</u> Dans la suite $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $j \in [\![1,n]\!]$ nous noterons $C_j(M)$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de M. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall j \in [\![1,n]\!], C_j(M) = ME_j$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(f_\lambda(A)) = \begin{cases} \lambda E_j & \text{si } j \in [\![1, n-1]\!] \\ C_j(A) & \text{si } j = n \end{cases}$. Le texte est essentiel dans la suite.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j((f_\lambda \circ f_\lambda)(A)) = C_j(f_\lambda(f_\lambda(A))) = \begin{cases} \lambda E_j & \text{si } j \in [\![1, n-1]\!] \\ C_j(f_\lambda(A)) & \text{si } j = n \end{cases}$

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j((f_\lambda \circ f_\lambda)(A)) = \begin{cases} \lambda E_j & \text{si } j \in [\![1, n-1]\!] \\ C_j(A) & \text{si } j = n \end{cases}$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j((f_\lambda \circ f_\lambda)(A)) = C_j(f_\lambda(A))$. Donc les matrices $(f_\lambda \circ f_\lambda)(A)$ et $f_\lambda(A)$ sont égales.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(f_\lambda \circ f_\lambda)(A) = f_\lambda(A)$. Par conséquent <u>$f_\lambda \circ f_\lambda = f_\lambda$.</u>

<u>e)</u> • Supposons que f_λ soit un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $f_\lambda(O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Donc $C_1(f_\lambda(O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})) = C_1(O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$. Par conséquent $\lambda E_1 = O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Comme $E_1 \neq O_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, $\lambda = 0$.

Si f_λ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda = 0$.

- Notons que f_0 est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$

  → f_0 est une application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

  → Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$.

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\quad C_j(f_0(\lambda A+B)) = \begin{cases} 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{si } j \in [\![1,n-1]\!] \\ C_j(\lambda A+B) & \text{si } j = n \end{cases}.$$

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(\lambda f_0(A)+f_0(B)) = \begin{cases} \lambda 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} + 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} & \text{si } j \in [\![1,n-1]\!] \\ \lambda C_j(A) + C_j(B) & \text{si } j = n \end{cases}.$$

Or $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(\lambda A+B) = \lambda C_j(A) + C_j(B)$. et $\lambda 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} + 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(f_0(\lambda A+B)) = C_j(\lambda f_0(A) + f_0(B))$.

Ainsi $\quad f_0(\lambda A+B) = \lambda f_0(A) + f_0(B)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$, $f_0(\lambda A+B) = \lambda f_0(A) + f_0(B)$. f_0 est linéaire.

f_0 est donc un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$.

Finalement f_λ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lambda = 0$.

---

f_0 est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $f_0 \circ f_0 = f_0$. Ainsi f_0 est une projection vectorielle. Mieux f_0 est la projection vectorielle sur $\mathrm{Im} f_0 = \mathrm{Ker}(f_0 - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})})$ parallèlement à $\mathrm{Ker} f_0$. Notons que $\underline{M_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(f_0 - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}) \oplus \mathrm{Ker} f_0}$.

$X^2 - X$ est un polynôme annulateur de f_0 dont les zéros sont 0 et 1. Alors $\underline{\mathrm{Sp} f_0 \subset \{0,1\}}$.

<u>1er cas</u>.. $\mathrm{Ker}(f_0 - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}) = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$. Alors $\mathrm{Ker} f_0 = M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $f_0 = 0_{\mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}))}$. f_0 est diagonalisable.

<u>2e cas</u>.. $\mathrm{Ker} f_0 = \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$. Alors $\mathrm{Ker}(f_0 - \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}) = M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $f_0 = \mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{R})}$. f_0 est diagonalisable.

<u>3ème cas.</u>- $\mathrm{Ker}(f_0 - Id_{M_n(\mathbb{R})}) \neq \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$ et $\mathrm{Ker}\, f_0 \neq \{0_{M_n(\mathbb{R})}\}$.

Alors 0 et 1 sont valeurs propres de f_0. Ainsi $\{0,1\} \subset Sp\, f_0 \subset \{0,1\}$

donc $Sp\, f_0 = \{0,1\}$ et $SEP(f_0,1) \oplus SEP(f_0,0) = \mathrm{Ker}(f_0 - Id_{M_n(\mathbb{R})}) \oplus \mathrm{Ker}\, f_0 = M_n(\mathbb{R})$.

Alors f_0 est diagonalisable.

Dans tous les cas <u>f_0 est diagonalisable</u> ce qui n'est pas un scoop pour une projection vectorielle,

(Q4) <u>a)</u> Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$.

encore !

• Pour montrer que $f_0(A)U = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ montrons que ces deux matrices ont mêmes colonnes.

Montrons donc que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(f_0(A)U) = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $C_j(f_0(A)U) = f_0(A)UE_j \underset{UE_j = E_j}{=} f_0(A)E_j = C_j(f_0(A)) = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$C_n(f_0(A)U) = f_0(A)UE_n = f_0(A)0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ceci achève de montrer que <u>$f_0(A)U = 0_{M_n(\mathbb{R})}$</u>.

$\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $C_j(f_0(AB)) = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $C_j(Af_0(B)) = Af_0(B)E_j = AC_j(f_0(B)) = A0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

Donc $\forall j \in [\![1,n-1]\!]$, $C_j(f_0(AB)) = C_j(Af_0(B))$.

$C_n(f_0(AB)) = C_n(AB) = ABE_n = AC_n(B) = AC_n(f_0(B)) = Af_0(B)E_n = C_n(Af_0(B))$.

Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(f_0(AB)) = C_j(Af_0(B))$. Alors <u>$f_0(AB) = Af_0(B)$</u>.

<u>b)</u> Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$.

$f_\lambda(A)f_\lambda(B) = f_\lambda(A)(\lambda U + f_0(B)) = \lambda f_\lambda(A)U + f_\lambda(A)f_0(B) = \lambda(\lambda U + f_0(A))U + f_\lambda(A)f_0(B)$.

$f_\lambda(A)f_\lambda(B) = \lambda^2 U^2 + \lambda \underbrace{f_0(A)U}_{=0_{M_n(\mathbb{R})}} + f_\lambda(A)f_0(B) \underset{\text{cf et } U^2 = U}{=} \lambda^2 U + \lambda.0_{M_n(\mathbb{R})} + f_\lambda(A)f_0(B) = \lambda^2 U + f_\lambda(A)f_0(B)$.

<u>$f_\lambda(A)f_\lambda(B) = \lambda^2 U + f_\lambda(A)f_0(B)$</u>.

$f_{\lambda^2}(AB) = \lambda^2 U + f_0(AB) \overset{a)}{=} \lambda^2 U + Af_0(B)$. <u>$f_{\lambda^2}(AB) = \lambda^2 U + Af_0(B)$.</u>

Alors $f_\lambda(A)f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \Leftrightarrow \lambda^2 U + f_\lambda(A)f_0(B) = \lambda^2 U + Af_0(B) \Leftrightarrow f_\lambda(A)f_0(B) = Af_0(B)$

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, \ f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB) \Leftrightarrow A f_0(B) = f_\lambda(A) f_0(B)$.

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$\left(\forall B \in M_n(\mathbb{R}), f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)\right) \Leftrightarrow \left(\forall B \in M_n(\mathbb{R}), A f_0(B) = f_\lambda(A) f_0(B)\right)$.

* Si $A = f_\lambda(A)$: $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \ A f_0(B) = f_\lambda(A) f_0(B)$. Donc $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$.

* Réciproquement supposons que $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \ f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$.

Montrons que $A = f_\lambda(A)$.

On a $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \ A f_0(B) = f_\lambda(A) f_0(B)$.

En particulier $A f_0(B) E_n = f_\lambda(A) f_0(B) E_n$ pour tout B dans $M_n(\mathbb{R})$.

Alors $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \ A C_n(B) = f_\lambda(A) C_n(B)$.

Donc $\forall j \in [\![1, n]\!], \ A C_n(E_{j,n}) = f_\lambda(A) C_n(E_{j,n})$.

Or $\forall j \in [\![1,n]\!]$, la $n^{\text{ème}}$ colonne de $E_{j,n}$ est E_j.

Donc $\forall j \in [\![1,n]\!], \ A E_j = f_\lambda(A) E_j$. Alors $\forall j \in [\![1,n]\!], \ C_j(A) = C_j(f_\lambda(A))$.

Donc $A = f_\lambda(A)$

Ainsi $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$ si et seulement si $A = f_\lambda(A)$

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

i) $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \ f_\lambda(A) f_\lambda(B) = f_{\lambda^2}(AB)$

ii) $f_\lambda(A) = A$

iii) Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est λE_j

Question 9 HEC 2008 S9 $\boxed{\textbf{F1}}$

U est une variable aléatoire définie sur un espace probablilsé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de loi uniforme sur $]0,1]$, et $q \in]0,1[$.

Déterminer la loi de la variable alétaoire $X = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Ceci n'est pas une correction. Ce sont des éléments de corrections.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $P(X=k) = P\left(\left\lfloor \dfrac{\ln U}{\ln q} \right\rfloor = k-1\right) = P\left(k-1 \leq \dfrac{\ln U}{\ln q} < k\right)$

$P(X=k) \underset{\ln q < 0}{=} P((k-1)\ln q \geq \ln U > k \ln q) = P(q^{k-1} \geq U > q^k) = P(q^k < U \leq q^{k-1})$

$P(X=k) = F_U(q^{k-1}) - F_U(q^k) = q^{k-1} - q^k = (1-q)q^{k-1}$.

F_U est la fonction de répartition de U — $F_U(x) = x$ si $x \in [0,1]$

<u>**X suit la loi géométrique de paramètre $1-q$.**</u>

R