

SUJET Maths Approfondies 2

Exercice principal Maths Approfondies 2

1. Définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$.
2. On considère l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ données par leurs deux premiers termes $u_0 = a$ et $u_1 = b$ dans $\mathbb{R}$ puis par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n \quad (1)$$

On suppose dans un premier temps que $a > 0$ et $b > 0$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n < u_{n+1}$$

et pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)^2} < \frac{u_n}{n^2}$$

En déduire que la suite (u_n) admet une limite finie ou égale à $+\infty$ et que la suite $(\frac{u_n}{n^2})$ admet une limite finie.

3. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+2} = u_1 + 2 \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k+2}$$

puis que

$$u_{n+2} \geq u_0 + u_1 + 2u_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}$$

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. On suppose à présent que a et b ne sont plus forcément positifs mais sont quelconques dans $\mathbb{R}$. On note $u_n^{a,b}$ la suite vérifiant la relation de récurrence (1) telle que $u_0 = a$ et $u_1 = b$.

(a) Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que

$$(a, b) = \lambda(1, 1) + \mu(1, 2)$$

(b) En déduire en relation entre $u_n^{a,b}$, $u_n^{1,1}$ et $u_n^{1,2}$.

(c) Montrer que la suite $u_n^{a,b}$ admet une limite (éventuellement infinie) et que la suite $(\frac{u_n^{a,b}}{n^2})$ admet une limite finie.

Solution :

1. p9 EC1
2. On observe tout d'abord que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui permet de montrer aisément la première inégalité. Pour la 2ème, on remarque que pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \left(1 + \frac{2}{n+2}\right) = u_{n+1} \left(\frac{n+4}{n+2}\right)$$

puis

$$\frac{u_{n+2}}{(n+2)^2} < u_{n+1} \frac{n+4}{(n+2)^3} < \frac{u_{n+1}}{(n+1)^2}$$

car $(n+4)(n+1)^2 = n^3 + 6n^2 + 9n + 4$ et $(n+2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$.

La suite (u_n) , croissante, admet donc une limite finie ou égale à $+\infty$ et la suite $(\frac{u_n}{n^2})$, décroissante et minorée par 0, admet une limite finie.

3. La première relation s'obtient par une sommation en cascade à partir de la relation

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{2}{n+2} u_n$$

La deuxième relation s'en déduit en utilisant $u_1 \leq u_k$ pour $k \geq 1$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = +\infty$ (série harmonique), on a donc a fortiori $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. (a) λ et μ vérifient exactement $a = \lambda + \mu$ et $b = \lambda + 2\mu$, c'est à dire $\mu = b - a$ et $\lambda = 2a - b$.
(b) La relation de récurrence étant linéaire, on démontre par récurrence que

$$u_n^{a,b} = \lambda u_n^{1,1} + \mu u_n^{1,2} = (2a - b)u_n^{1,1} + (b - a)u_n^{1,2}$$

- (c) Immédiat en utilisant les résultats des questions 2 et 3 pour les suites $u_n^{1,1}$ et $u_n^{1,2}$ et la relation linéaire de 4b).

Exercice sans préparation Maths Approfondies 2

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de même loi.

Soit Y une variable aléatoire indépendante des deux autres telle que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in]0, 1[$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}.$$

1. On suppose pour cette question que $X_1 + 1$ suit une loi géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
Quelle est la probabilité que M soit inversible ?
2. On suppose pour cette question que X_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ .
Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Solution :

1. Notons I l'événement M est inversible.

M est non inversible ssi $\det(M) = 0$ ssi $X_1^2 = YX_2^2$

$$\mathbb{P}(X_1^2 = YX_2^2) = \mathbb{P}([X_1 = X_2] \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = X_2 = 0] \cap [Y = -1])$$

$$\stackrel{\text{indépendance}}{=} p \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k]) + (1-p) \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{P}(X_1^2 = YX_2^2) = \frac{1}{9} \left(p \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} + (1-p) \right)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(I) = 1 - \left(p \frac{1}{5} + (1-p) \frac{1}{9} \right)}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$M - \lambda I_2$ non inversible ssi $(\lambda - X_1)^2 - YX_2^2 = 0$ ssi $Y = 1$ et $(\lambda - X_1)^2 = X_2^2$ ou $Y = -1$ et $(\lambda - X_1) = X_2 = 0$

Si $Y = 1$ alors $Sp(M) = \{X_1 \pm X_2\}$ et M est diagonalisable (dans le cas où $X_2 = 0$, M est déjà diagonale!).

Si on note D l'événement M est diagonalisable alors

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D \cap [Y = 1]) + \mathbb{P}(D \cap [Y = -1]) = \mathbb{P}([Y = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 0] \cap [Y = -1]) = \boxed{p + (1-p)e^{-\lambda}}$$