SUJET Maths Approfondies 16

Exercice principal Maths Approfondies 16

On suppose que $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est telle que :

$$\exists \alpha \in]0,1],\ \exists K \geqslant 0,\ \forall (y,z) \in [0,1]^2,\ |f(y)-f(z)| \leqslant K|y-z|^\alpha.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme :

$$B_n f(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Enoncer le théorème de transfert
2. Soit $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1,\cdots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x. On pose
$$S_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}.$$
Exprimer $E(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$ et $E(f(S_n))$ en fonction de x, n et du polynôme $B_n f$.
3. En déduire les inégalités :
$$\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \mathbb{V}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
4. Soit $\alpha \in [0,1]$. Montrer que $\lambda^\alpha \leq 1+\lambda$ pour tout réel $\lambda > 0$ et en déduire l'inégalité :
$$\left|x-\frac{k}{n}\right|^\alpha \leqslant n^{-\alpha/2}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)$$
pour tous $x \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,...,n\}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$|f(x)-B_n f(x)| \leqslant \frac{3K}{2}\frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

Solution :

1. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi binomiale de paramètres n et x.
$$P(S_n = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$
Puisque les variables ont la même loi, on a
$$E(S_n) = E(X_\ell) = x.$$
Puisque les variables sont deux à deux indépendantes, on a aussi :
$$\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = nx(1-x).$$
D'où
$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$
Par le théorème de transfert on a aussi :
$$E(f(S_n)) = B_n f(x).$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} |x-\frac{k}{n}|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \mathbb{E}\left(|x-S_n|\right) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left((x-S_n)^2\right)} = \mathbb{V}(S_n))^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{V}(S_n))^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. On sépare le cas $\lambda \leq 1$ (trivial) du cas $\lambda \geq 1$ (pour lequel $\lambda \geq \lambda^\alpha$). En choisissant $\lambda = \sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|$ dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité :

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|^\alpha \leqslant n^{-\alpha/2}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)$$

4.

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_nf(x)| &= |E(f(x)-f(S_n))| = |\sum_{k=0}^{n}(f(x)-f(\frac{k}{n}))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}|,\\
&\leqslant |\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(\frac{k}{n})|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\\
&\leqslant K\sum_{k=0}^{n}|x-\frac{k}{n}|^\alpha\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\\
&\leqslant Kn^{-\alpha/2}[\sum_{k=0}^{n}(1+\sqrt{n}|x-\frac{k}{n}|)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}]\\
&\leqslant Kn^{-\alpha/2}(1+\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}|x-\frac{k}{n}|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k})\\
&\leqslant \frac{3}{2}Kn^{-\alpha/2}.
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 16

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$.

Solution :

1. Demander un dessin
2. Soit f une fonction solution. Puisque $f \circ f = \mathrm{Id}$, la fonction f réalise une bijection entre $[0,+\infty[$ et $\mathrm{Im}\ f$; elle est même sa propre réciproque, assurant que $\boxed{\mathrm{Im}\ f = [0,+\infty[}$.
3. Puisqu'elle est continue, elle est nécessairement $\boxed{\text{strictement monotone}}$ sur $[0,+\infty[$. En effet si par exemple il existe a,b,c tels que $a < b < c$, $f(a) < f(b)$ et $f(c) > f(b)$, tout α élément de $]\max(f(a),f(c)),f(b)[$ aurait au moins deux antécédent par le TVI, c'est absurde.
4. Si f était strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, elle ne pourrait être surjective sur $[0,+\infty[$. Elle est donc $\boxed{\text{strictement croissante.}}$
5. Soit $x \in [0,+\infty[$.
   Supposons que $f(x) < x$. Par stricte croissance de f, on a : $x = f(f(x)) < f(x) < x$, ce qui est absurde.
   On obtient une absurdité similaire en supposant $f(x) > x$. On en déduit que $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,+\infty[$, i.e. $\boxed{f = \mathrm{Id}\,.}$
6. Puisque $\boxed{\text{l'application Id convient}}$ (elle est continue et vérifie l'équation fonctionnelle $f \circ f = \mathrm{Id}$) c'est la seule fonction solution.