SUJET Maths Approfondies 1

Exercice principal Maths Approfondies 1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ soient des ensembles finis et telles que X ne soit pas une variable constante.

On considère la fonction $g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b) & \mapsto & \mathbb{E}((Y-(aX+b))^2) \end{array} \right.$

1. Question de cours : condition suffisante d'extremum global pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie de $\mathbb{R}^n$.
2. (a) Montrer que la fonction g est correctement définie et montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que g admet un unique point critique que l'on notera (a_0, b_0).
   On exprimera a_0 à l'aide de $\mathbb{V}(X)$ et de $\mathrm{Cov}(X,Y)$ et b_0 à l'aide de a_0, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
   (c) g atteint-elle en son point critique un minimum absolu ?

   On suppose jusqu'à la fin de l'exercice X et Y construits de la manière suivante :
   - n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   - On suppose connus n points $A_1 = (x_1, y_1)$,...,$A_n = (x_n, y_n)$ du plan où les réels $x_1, ..., x_n$ ne sont pas tous égaux.
   - La variable aléatoire I suit une loi uniforme sur $[|1, n|]$.
   - On construit le couple de variables aléatoires (X, Y) en posant pour tout $\omega \in \Omega$, $(X(\omega), Y(\omega)) = A_{I(\omega)}$.

   Autrement dit, on choisit un point au hasard dans $\{A_1, ...A_n\}$ et (X, Y) donne les coordonnées de ce point.
3. On suppose dans cette question seulement que $n = 3$, $A_1 = (1,1)$, $A_2 = (2,1)$, $A_3 = (3,4)$.
   (a) Calculer $\mathbb{V}(X)$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
   (b) Placer sur un même graphe la droite d'équations $y = a_0x+b_0$ et les trois points A_1, A_2 et A_3. Commentez.

   On se place maintenant dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne usuelle et l'on considère les vecteurs $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ et $\vec{z} = (1, \cdots, 1)$.
4. On admet provisoirement que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad g(a,b) = \dfrac{1}{n} ||\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{z})||^2$.

   On pourra poser pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{z}$.
   (a) Montrer d'une deuxième manière que g admet un minimum global que l'on interprétera géométriquement.
   (b) Montrer que ce minimum global est atteint en un unique point (a_0, b_0).
   (c) Montrer que $< \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{x} >= 0$ et $< \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{z} >= 0$ et retrouver les équation ayant conduit à la détermination de (a_0, b_0) à la question 2.
5. Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad g(a,b) = \dfrac{1}{n} ||\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{z})||^2$.

Solution :

1. Programme deuxième année page 20.
   Si Ω est un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et si x_0 est un point critique de f :
   - si pour tout $x \in \Omega, \mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(x)\right) \subset \mathbf{R}^+$, alors f admet un minimum global en x_0,
   - si pour tout $x \in \Omega, \mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(x)\right) \subset \mathbf{R}_-$, alors f admet un maximum global en x_0.
2. (a) Les variables étant bornées, elles admettent des moments de tout ordre.
   Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $g(a,b) = \mathbb{E}(Y^2 + a^2X + b^2 - 2aXY - 2bY + 2abX)$
   Par linéarité $g(a,b) = \mathbb{E}(X^2)a^2 + b^2 + 2\mathbb{E}(X)ab - 2a\mathbb{E}(XY) - 2b\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y^2)$
   g est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynômiale

(b) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert. On cherche ses points critiques.

$\nabla g((a,b)) = \begin{pmatrix} 2a\mathbb{E}(X^2) + 2b\mathbb{E}(X) - 2\mathbb{E}(XY) \\ 2a\mathbb{E}(X) + 2b - 2\mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$

$\nabla g((a,b)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $\begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(XY) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$

ssi $\begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) & 0 \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ \mathbb{E}(Y) \end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} V(X)a & = & Cov(X,Y) \\ \mathbb{E}(X)a & +b & = & \mathbb{E}(Y) \end{cases}$

Comme X n'est pas constante, $V(X) \neq 0$ et le système admet une solution unique.

On a un unique point critique (a_0, b_0) : $\boxed{a_0 = \dfrac{Cov(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b_0 = \mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X)}$

(c) La fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert convexe ($\mathbb{R}^2$).

$\nabla^2 g((a,b)) = 2\begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1 \end{pmatrix} = 2M$ ne dépend pas de (a,b).

On cherche les valeur propres de M, $M - \lambda I = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X^2) - \lambda & \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X) & 1 - \lambda \end{pmatrix}$.

λ est une valeur propre de M ssi $(\mathbb{E}(X^2) - \lambda)(1-\lambda) - \mathbb{E}^2(X) = 0$ ssi $\lambda^2 - (\mathbb{E}(X^2)+1)\lambda + V(X) = 0$.
M étant symétrique, elle est diagonalisable, le polynôme admet deux racines (éventuellement confondues).
Le produit des deux valeurs propres vaut $V(X) > 0$, les deux valeurs propres sont de même signe.
Leur somme vaut $\mathbb{E}^2(X) + 1$, elles sont toutes les deux strictement positives.
Les valeurs propres de $\nabla^2 g((a,b))$ sont donc strictement positives pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Donc g atteint un minimum global en son unique point critique d'après le cours.
$\boxed{g \text{ atteint un unique minimum global.}}$

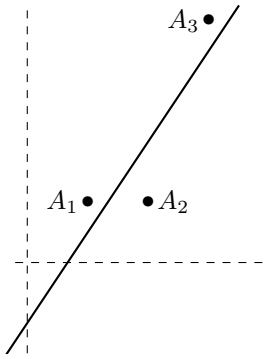
3. (a) • X suit une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = 2}$, $V(X) = \dfrac{3^2-1}{12}\boxed{= \dfrac{2}{3}}$.

• $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2.}$

• $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{1}{3}(1 + 2 + 12) = 5$, $Cov(X,Y) = 5 - 4\boxed{= 1}$.

• $a_0 = \dfrac{3}{2}$, $b_0 = \mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X) = -1$. La droite admet pour équation $\boxed{y = \dfrac{3}{2}x - 1}$.

(b) On trace le graphe, et l'on remarque que la droite semble "au plus proche" des trois points.



C'est logique. a_0 et b_0 ont été choisis pour minimiser $\mathbb{E}((Y - (aX+b))^2)$, donc à rendre "petit" l'écart entre y_i et $ax_i + b$.

4. (a) On note F =vect$(\vec{x}, \vec{z})$
On note p le projecteur orthogonal sur F
On a $||\vec{y} - p(\vec{y})|| = \min\limits_{\vec{u} \in F} ||\vec{y} - \vec{u}||$
Or, $p(\vec{y}) \in F$, il existe donc $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(\vec{y}) = a_0\vec{x} + b_0\vec{z}$
$\forall \vec{u} \in F$, $||\vec{y} - p(\vec{y})|| \leqslant ||\vec{y} - \vec{u}||$,
ie $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $g((a_0,b_0)) \leqslant g((a,b))$
$\boxed{g \text{ atteint en } (a_0,b_0) \text{ un minimum global.}}$

(b) $\vec{y} - \vec{v} = \vec{y} - p(\vec{y}) + p(\vec{y}) - \vec{v}$

Or, $\vec{y} - p(\vec{y}) \in F^\perp$ et $p(\vec{y}) - \vec{v} \in F$

Donc d'après Pythagore

$||\vec{y} - \vec{v}||^2 = ||\vec{y} - p(\vec{y})||^2 + ||p(\vec{y}) - \vec{v}||^2$

Ainsi $||\vec{y} - \vec{v}|| = ||\vec{y} - p(\vec{y})||$ ssi $\vec{v} = p(\vec{y})$

Autrement dit $g((a,b)) = g((a_0,b_0))$ ssi $a\vec{x} + b\vec{z} = a_0\vec{x} + b_0\vec{z}$.

Or, les réels $x_1 ... x_n$ ne sont pas tous égaux, donc $\vec{x}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires, et forment une famille libre.

Ainsi $g((a,b)) = g((a_0,b_0))$ ssi $a = a_0$ et $b = b_0$.

Le minimum de g est atteint un unique point

(c) Comme $\vec{x}, \vec{z} \in F$, $\vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}) = \vec{y} - p(\vec{y}) \in F^\perp$, on a bien :

$< \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{z}), \vec{x} >= 0$ et $< \vec{y} - (a_0\vec{x} + b_0\vec{y}), \vec{z} >= 0.$

La première équation donne $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - a_0 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - b_0 \sum_{k=1}^{n} x_k = 0$

ie $n\left(\mathbb{E}(XY) - a_0\mathbb{E}(X^2) - b_0\mathbb{E}(X)\right) = 0$ ie $\mathbb{E}(XY) - a_0\mathbb{E}(X^2) - b_0\mathbb{E}(X) = 0$

La deuxième équation donne $\mathbb{E}(Y) - a_0\mathbb{E}(X) - b_0 = 0$

Ce sont bien les équations du premier ordre trouvées lors de l'étude de g.

5. Par théorème du transfert (avec la fonction $h : i \mapsto (y_i - (ax_i + b))^2$ et la variable I.)

$$g(a,b) = \sum_{i=1}^{n} h(i)\mathbb{P}([I = i]) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}(y_i - (ax_i + b))^2$$

$$g(a,b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((y_i - (ax_i + b))^2 = \frac{1}{n}\,||\vec{x} - (a\vec{y} + \vec{z})||^2.$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 1

On considère la suite (F_n) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Calculer F_n. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{F_{2^n}}$ converge et calculer sa somme. On pourra exprimer $\dfrac{1}{F_{2^n}}$ sous la forme $u_n - u_{n+1}$ où u_n est une suite à déterminer.

Solution :

Les racines de l'équation caractéristiques $r^2 - r - 1 = 0$ sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Avec les conditions initiales, on trouve

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$$

La convergence de la série est assurée car $\sqrt{5}F_n \sim r_1^n$.

puis pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{5}F_{2^n}} = \frac{1}{r_1^{2^n} - r_2^{2^n}} = \frac{r_1^{2^n}}{r_1^{2^{n+1}} - 1}$$

car $r_1 r_2 = -1$, soit :

$$\frac{1}{\sqrt{5}F_{2^n}} = \frac{r_1^{2^n} + 1}{r_1^{2^{n+1}} - 1} - \frac{1}{r_1^{2^{n+1}} - 1} = \frac{1}{r_1^{2^n} - 1} - \frac{1}{r_1^{2^{n+1}} - 1}$$

Par une somme en cascade, on trouve finalement que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = 1 + \sqrt{5}\frac{1}{r_1^2 - 1} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$$