

EXERCICE PRINCIPAL S 227

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $a \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{1}{2(1-a)} & \text{si } x \in]a, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n -échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même

loi que X . Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

On suppose que a est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

1. Question de cours : énoncer le théorème de Slutsky.

2.a) Déterminer la fonction de répartition F de X .

b) Tracer la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

3.a) Calculer $E(X)$. On donne $V(X) = \frac{4 + (2a - 1)^2}{48}$.

b) Construire à partir de $\bar{X}_n$ un estimateur T_n sans biais et convergent du paramètre a .

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $U_n = \frac{T_n - a}{\sqrt{V(T_n)}}$ et $Z_n = \frac{2\sqrt{3n}(T_n - a)}{\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2}}$.

a) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

b) En déduire que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

c) Construire un intervalle de confiance asymptotique pour a au niveau de confiance $1 - \alpha$ ($0 < \alpha < 1$).

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL S 227

1. Cours.

$$2.a) \text{ On trouve : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2a} & \text{si } x \in [0, a] \\ \frac{1}{2} + \frac{x-a}{2(1-a)} & \text{si } x \in]a, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

b) Le dessin doit montrer la non dérivabilité de F en 0, a et 1.

$$3.a) E(X) = \int_0^a \frac{x}{2a} dx + \int_a^1 \frac{x}{2(1-a)} dx = \frac{a^2}{4a} + \frac{1-a^2}{4(1-a)} = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}.$$

b) On a $E(\bar{X}_n) = \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow T_n = 2\bar{X}_n - \frac{1}{2}$ est un estimateur sans biais de a (on peut remarquer que T_n est un estimateur car c'est une fonction de $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendante de a).

Par indépendance des X_n , on a : $V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} V(X) = \frac{4 + (2a - 1)^2}{48n} \Rightarrow V(T_n) = 4V(\bar{X}_n) = \frac{4 + (2a - 1)^2}{12n}$,
et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(T_n) = 0$, l'estimateur T_n est convergent.

4.a) On pose : $S_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}}$. Le théorème limite central permet d'affirmer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge

en loi vers une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(0, 1)$. Or, on trouve sans difficulté que $S_n = \frac{T_n - a}{\sqrt{V(T_n)}} = U_n$.

Par conséquent, la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(0, 1)$.

b) On sait que la suite $(\bar{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $E(X) = \frac{a}{2} + \frac{1}{4}$. La fonction $f : x \mapsto 2x - \frac{1}{2}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $f(\bar{X}_n) = T_n$. D'après le cours, la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers a .

De même, par continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{4 + (2x - 1)^2}$, on peut dire que la suite $(\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2})_{n \geq 1}$

converge en probabilité vers $\sqrt{4 + (2a - 1)^2}$. Par conséquent, en posant $R_n = \frac{\sqrt{4 + (2a - 1)^2}}{\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2}}$, la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la constante égale à 1.

De plus, compte tenu des définitions des suites en jeu et des résultats précédents, il est facile de montrer que $\forall n \geq 1$, on a $Z_n = U_n \times R_n$. Or la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la constante 1. Le théorème de Slutsky permet alors d'affirmer que la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $1 \times U = U \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

c) On note Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$ et $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$. On a alors :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(-t_\alpha \leq Z_n \leq t_\alpha) = 1 - \alpha$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-t_\alpha \leq \frac{2\sqrt{3n}(T_n - a)}{\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2}} \leq t_\alpha\right) = 1 - \alpha$, et finalement :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(T_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2} \leq a \leq T_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{3n}}\sqrt{4 + (2T_n - 1)^2}\right).$

EXERCICE SANS PRÉPARATION S 227

Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension $3n$.

Soit f un endomorphisme de E de rang $2n$ et g la restriction de f au sous-espace vectoriel $\text{Im} f$.

1. Montrer que $\text{Im} g = \text{Im} f^2$ et $\text{Ker} g = \text{Ker} f \cap \text{Im} f$.

2. On note $\text{rg}(f^2)$ le rang de f^2 . Dédurre de la question précédente que $\text{rg}(f^2) \geq n$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION S 227

1. Montrons que $\text{Im} g = \text{Im} f^2$.

- Soit $y \in \text{Im} g$. Il existe $x \in \text{Im} f$ tel que $y = g(x)$. Donc, $\exists u \in E$, $x = f(u) \implies y = f^2(u) \in \text{Im} f^2$.
- Soit $y \in \text{Im} f^2$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)$. Or, $f(x) \in \text{Im} f \implies y = g(f(x)) \in \text{Im} g$.

Bilan : $\text{Im} g = \text{Im} f^2$.

Montrons que $\text{Ker} g = \text{Ker} f \cap \text{Im} f$.

- Soit $x \in \text{Ker} g$. D'après la définition de g , on a $x \in \text{Im} f$ et $g(x) = f(x) = 0_E$. Donc, $x \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$.
- Soit $x \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$. Alors, $f(x) = 0_E$. Or, $x \in \text{Im} f$, donc $g(x) = f(x)$ et $x \in \text{Ker} g$.

Bilan : $\text{Ker} g = \text{Ker} f \cap \text{Im} f$.

2. D'après la question 1, on a $\text{Ker} g \subset \text{Ker} f$ et puisque $\dim \text{Ker} f = n$ (théorème du rang), on a : $\dim \text{Ker} g \leq n$.

D'autre part, d'après le théorème du rang, on a :

$\dim \text{Ker} g + \text{rg}(g) = \dim \text{Im} f \implies \text{rg}(f^2) = 2n - \dim \text{Ker} g \geq n$, donc, $\text{rg}(f^2) \geq n$.