CHAPITRE

5 EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

Question sans préparation 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit u un endomorphisme de E qui commute avec tous les projecteurs de E.

1. Montrer que si $x \in E$ avec $x \neq 0$, alors x est vecteur propre de u.
2. En déduire que u est une homothétie, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \mathrm{id}_E$.

Solution de la QSP.

1. Si u commute avec un projecteur p, alors u stabilise $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$.
   Soit $x \neq 0$. On complète x en une base de E, $(x, e_2, \ldots, e_n)$ et on définit la projection p_x par
   $$p_x(x) = x,\ p_x(e_i) = 0 \quad \forall i \in [\![2, n]\!]$$
   Ainsi $u(x) \in \operatorname{Im}(p_x) \Rightarrow u(x) = \lambda_x x$.
   Autre rédaction : soit p le projecteur sur $\operatorname{Vect}(x)$ par rapport à,un supplémentaire quelconque.
   Alors $p(x) = x$. Donc $u(x) = u(p(x)) = p(u(x)) \in \operatorname{Im} p$.
   Or $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(x)$, d'où $u(x) = \lambda_x x$.
2. Ainsi tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u.
   Par l'absurde supposons que $\lambda \neq \mu$ sont deux valeurs propres différentes de u.
   Alors existe x, y non nuls et indépendants tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$. Donc
   $$u(x + y) = \lambda x + \mu y = \alpha(x + y) \Rightarrow \lambda = \alpha = \mu$$
   Il existe donc λ tel que pour tout $x \in E, u(x) = \lambda x$.

Question sans préparation 2

Soit un entier avec $n \geqslant 2$. Soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et vérifiant pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ avec i et j distincts :

$$\forall (k, m) \in [\![0, n]\!]^2, \quad P\big([X_i = k] \cap [X_j = m]\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = k \\ \dfrac{1}{n(n+1)} & \text{si } m \neq k \end{cases}$$

On pose $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer les valeurs prises par Z_n.
2. Déterminer la loi de Z_n.

Solution de la QSP.

1. On a $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$ (presque sûrement). En effet, si l'événement $[Z_n \geqslant 2]$ est réalisé, alors on a nécessairement au moins deux variables parmi $X_1, \ldots, X_n$ qui sont égales, ce qui est de probabilité nulle.
2. On a : $[Z_n = 0] = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 0]$. Ces événements sont presque sûrement incompatibles puisque $P\big([X_i = k] \cap [X_j = m]\big) = 0$ si $m = k$. On a donc :

$$P([Z_n = 0]) = \sum_{i=1}^{n} P([X_i = 0])$$

Or, elles ont toutes la même loi car, en utilisant le système complet d'événements $([X_j = p])\ ;\ p \in [\![0, n]\!]$:

$$P([X_i = 0]) = \sum_{p=0}^{n} P\big([X_i = 0] \cap [X_j = p]\big) = \sum_{p=0, p\neq i}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$P([Z_n = 0]) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Donc $P[Z_n = 1] = \frac{1}{n+1}$ donc Z_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n+1}$.

Question sans préparation 3

1. Si X suit la loi exponentielle de paramètre 1, déterminer $E(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Si Y suit la loi exponentielle de paramètre λ, trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de $E\left(\left(Y - \dfrac{1}{\lambda}\right)^n\right)$.

Solution de la QSP.

1. Par théorème de transfert, $E(X^k)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t$ converge absolument.

   En utilisant les propriétés de la fonction Gamma, on obtient que $E(X^k)$ existe et vaut $\Gamma(k+1) = k!$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\left(Y - \dfrac{1}{\lambda}\right)^n = \dfrac{(\lambda Y - 1)^n}{\lambda^n} = \dfrac{(X-1)^n}{\lambda^n}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

   Et $(X-1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$ d'après la formule du binôme.

   D'où : $E((X-1)^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k!$ par linéarité de l'espérance.

   Ainsi : $E((X-1)^n) = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}}$.

   Ainsi : $E\left(\left(Y - \dfrac{1}{\lambda}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{\lambda^n \mathrm{e}}$.

   Autre rédaction : faire le changement de variable $u = \lambda t$ dans l'intégrale qui exprime $E\left(\left(Y - \dfrac{1}{\lambda}\right)^n\right)$.

Question sans préparation 4

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'une application φ de E dans E est une isométrie si $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in E^2$.
On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des isométries de E dans E.

1. Soit $f \in \mathcal{I}(E)$, montrer qu'il existe $(u, g) \in E \times \mathcal{I}(E)$ tel que :

$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ f(x) = u + g(x).$$

   Montrer ensuite que $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$.
   En déduire que g est linéaire et que c'est un isomorphisme de E.

2. Donner un exemple d'application h de E dans E qui vérifie $\|h(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ mais qui n'est pas une isométrie.

Solution de la QSP.

1. On voit qu'il faudrait que $u = f(0)$, on définit donc g par $g(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in E$.
   Il est clair que le couple $(f(0), g)$ convient.
   Comme g est une isométrie, pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on obtient par développement

$$\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - 2\langle g(x), g(y)\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle.$$

   Or $g(0) = 0$, ce qui entraîne $\|g(v)\| = \|g(v) - g(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$ pour tout $v \in E$.
   En tenant compte de cette propriété dans le développement précédent, on aboutit après simplification à l'égalité demandée.
   Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors on doit avoir $\langle g(e_i), g(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ ce qui implique que $\mathcal{B}' = (g(e_1), \cdots, g(e_n))$ est aussi une base orthonormée.
   On en déduit que pour tout $x \in E$ on a

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle g(x), g(e_i)\rangle g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle g(e_i),$$

   il est alors clair que g est linéaire.
   De plus, on a vu que l'image de la base $\mathcal{B}$ est une base, le cours nous dit alors que g est un isomorphisme.

2. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E, il suffit de considérer l'application h définie par

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle| e_i.$$

   En effet, on a bien $h(0) = 0$ et $\|h(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ mais $h(x) + h(-x) = 2h(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, ce qui interdit à h d'être une isométrie d'après la question 1).

Question sans préparation 5

On considère une fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $I = [0, 1]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence d'une constante $M \in \mathbb{R}^2$ telle que
$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2.$$
pour tout couple $(k, t) \in [\![0, n]\!] \times I$.
2. En déduire que
$$\lim_{n \to +\infty} n \left[\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Solution de la QSP.

1. Comme la fonction $|f''|$ est continue sur le segment I elle possède un maximum $M \in \mathbb{R}_+$. L'inégalité de Taylor Lagrange s'applique et donne ce que l'on souhaite.
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On intègre l'inégalité précédente entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ et avec la version intégrale de l'inégalité triangulaire il vient
$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \leqslant \frac{M}{6n^3}.$$
D'où, par somme, et produit par n :
$$\begin{aligned} n\left| \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt &\leqslant n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \\ &\leqslant n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{6n^3} = \frac{M}{6n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$
Et on conclut car la somme de Riemann associée à f' qui apparaît converge vers $\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0)$.

Question sans préparation 6

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi. On pose $p = P(X_1 = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit une variable aléatoire Y_n par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \mathrm{card}\{k \in [\![1, n]\!] | X_k(\omega) = 1\},$$

où l'on a noté « card$E$ » le cardinal de l'ensemble (fini) E.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_n.
2. Soit $\lambda > 0$. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre λ et qui est indépendante des variables X_n. On définit une variable aléatoire Z par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Déterminer le loi de Z

Solution de la QSP.

1. On reconnaît que Y_n compte le nombre d'événements réalisés parmi $(X_1 = 1), \ldots, (X_n = 1)$.
Ils sont indépendants de même probabilité p donc Y_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ (avec le cas particulier de la loi certaine nulle si $n = 0$).
2. On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}$, et pout tout $k \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$ donne :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((Z = k) \cap (N = n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((Y_n = k) \cap (N = n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = k)P(N = n) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)}{k!} \mathrm{e}^{\lambda q} = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)}{k!}. \end{aligned}$$

Donc Z suit la loi de Poisson de paramètre λp.

Question sans préparation 7

Soit (u_n) la suite déterminée par la donnée du réel $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+2u_n}.$$

Soit (v_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et montrer que la suite (u_n) converge vers une limite réelle que l'on notera ℓ.
2. Déterminer la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Solution de la QSP.

1. Par récurrence sur $n \geqslant 0$, on montre que u_n est définie et $u_n > 0$.
   Donc (v_n) est bien définie aussi.
   On a $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{2u_n} + 1$, soit $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + 1$.
   La suite (v_n) est arithmético-géométrique. Son point fixe est $x = 2$ donc, pour tout $n \geqslant 0$, on a :
   $$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - 2) + 2 \text{ d'où } \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$
2. On en déduit que :
   $$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2^{n+1}}(v_0-2)} - 1\right) \sim -\frac{1}{2^{n+2}}(v_0 - 2).$$
   Donc la série converge (absolument) par comparaison à une série géométrique.

Question sans préparation 8

Soit X une variable aléatoire positive qui possède une densité continue sur $\mathbb{R}_+$ et qui admet une espérance strictement positive.
On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$, qui est positive, croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et qui s'annule en 0.

1. On suppose que l'espérance de $h(X)$ existe. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$E(h(X)) = \int_0^{+\infty} h'(t)P(X > t)dt.$$
2. Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$.
On suppose de plus que X admet un moment d'ordre p et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h'(t)t^{-p}dt$ converge.
Prouver que :
$$E(h(X)) \leqslant h(E(X)) + E(X^p) \int_{E(X)}^{+\infty} \frac{h'(t)}{t^p}dt.$$

Solution de la QSP.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Notons F_X (resp f_X) la fonction de répartition (resp. la densité) de X.
On se souvient que $P(X > t) = 1 - F_X(t)$, une intégration par partie (justifiée par les hypothèses) nous donne
$$\int_0^a h(t)f_X(t)dt = [h(t)(F_X(t) - 1)]_0^a - \int_0^a h'(t)(F_X(t) - 1)dt = -h(a)P(X > a) + \int_0^a h'(t)P(X > t)dt.$$
Ensuite on tendre a vers $+\infty$ où :
   - comme $E(h(X))$ existe, le membre de gauche converge (théorème de transfert) ;
   - on a $0 \leqslant h(a)P(X > a) = h(a) \int_a^{+\infty} f_X(t)dt \leqslant \int_a^{+\infty} h(t)f_X(t)dt \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   D'où la formule souhaitée (y compris la convergence).
2. On utilise la question 1). Compte tenu des hypothèses , il vient
$$E(h(X)) \leqslant \int_0^{E(X)} h'(t)dt + \int_{E(X)}^{+\infty} h'(t)P(X^p > t^p)dt \leqslant h((E(X)) + E(X^p) \int_{E(X)}^{+\infty} \frac{h'(t)}{t^p}dt,$$
d'après l'inégalité de Markov $P(X^p > t^p) \leqslant \frac{E(X^p)}{t^p}$. La dernière intégrale est convergente grâce à la deuxième hypothèse de cette question car $E(X) > 0$.

Question sans préparation 9

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $(u_1, ..., u_m)$, $(v_1, ..., v_m)$ deux m-uplets d'éléments de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., m\}^2,\ \langle u_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les familles $(u_1, ..., u_m)$ et $(v_1, ..., v_m)$ sont libres.
2. Soit p le projecteur orthogonal sur le sous espace vectoriel F engendré par $(u_1, ..., u_m)$.

   Montrer que pour tout x dans E, $\|p(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle x, u_i \rangle \langle x, p(v_i) \rangle$.

Solution de la QSP.

1. Soit $a_1, ..., a_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i u_i = 0$. On a alors pour tout j , $\left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i u_i, v_j \right\rangle = 0$,
   d'où par linéarité du produit scalaire, $a_j \langle u_j, v_j \rangle = 0$ i.e. $a_j = 0$ ce qui prouve que $(u_1, ..., u_m)$ est libre.
   Raisonnement analogue pour $(v_1, ..., v_m)$.
2. Soit x un vecteur qui s'écrit $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^\perp$. Alors $p(x) = y$ d'où $\|p(x)\|^2 = \|y\|^2$.

   Or $y \in F$, d'où il existe $a_1, ..., a_m$ des réels tels que $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i u_i$. On voit que $a_i = \langle y, v_i \rangle$. D'où :

   $$\|y\|^2 = \left\langle y, \sum_{i=1}^{m} \langle y, v_i \rangle u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle y, u_i \rangle \langle y, v_i \rangle$$

   Or $\langle x, u_i \rangle = \langle y + z, u_i \rangle = \langle y, u_i \rangle$ car z est orthogonal à F donc à u_i.
   Et $\langle y, v_i \rangle = \langle p(x), v_i \rangle = \langle x, p(v_i) \rangle$ par symétrie de p.

   Finalement $\|p(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle x, u_i \rangle \langle x, p(v_i) \rangle$.

Question sans préparation 10

Soit $0 < a < b$ réels et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \neq 0$ par

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée f'
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
3. La fonction ainsi prolongée est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

Solution de la QSP.

1. Par le th. fondamental du calcul intégral, la fonction $t \to \dfrac{\sin t}{t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il vient

$$f'(x) = b \times \frac{\sin(bx)}{b^2x^2} - a \times \frac{\sin(ax)}{a^2x^2}.$$

2. On remarque que la fonction f est impaire.
Or, on sait que pour $t > 0$, $t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \sin t \leqslant t$ (inégalité de Taylor-Lagrange). Donc :

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leqslant \frac{\sin t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t}$$

En intégrant, il vient

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(a^2x^2 - b^2x^2\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

3. Un DL en 0, $\sin(ax) = ax - \dfrac{a^3x^3}{6} + o(x^3)$ donne $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.
Remarque : l'utilisation de ce calcul pour résoudre la question 2 avec le théorème de prolongement des fonctions C^1 (au programme) n'est pas valable car il faut aussi prouver que f converge en 0.