CHAPITRE

5

EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

QUESTION SANS PRÉPARATION 1

Soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère le système d'inconnues u et v :

$$(S) : \begin{cases} u + v = 1 \\ Xu + Yv = Z \end{cases}$$

Déterminer la probabilité que (S) possède une infinité de solutions.

QUESTION SANS PRÉPARATION 2

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, à valeurs positives telle que $xf'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(f(x))$.

1. Montrer, en étudiant la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^\alpha}$, que pour tout $\alpha > 0$, $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$.
2. En déduire que pour tout $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dt$ converge.

QUESTION SANS PRÉPARATION 3

Soit un entier $n \geq 2$. On considère n^2 variables aléatoires indépendantes $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ qui sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suivent toutes la loi de BERNOULLI de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice carrée $M(\omega)$ d'ordre n par $M(\omega) = [X_{i,j}(\omega)]_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Soient Y et Z les variables aléatoires définies par $Y = \text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n X_{k,k}$ et $Z = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{i,j} X_{j,i}$.
Déterminer les lois suivies par Y et Z .
2. On introduit la variable aléatoire U qui correspond à la trace de M^2 , c'est à dire $U(\omega) = \text{Tr}(M(\omega)^2)$ pour $\omega \in \Omega$. Calculer l'espérance et la variance de Y et de U .

QUESTION SANS PRÉPARATION 4

Les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes positives, admettant chacune un espérance. Prouver que si la suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0, alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.
2. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y_n = 2^{-n}) = \frac{1}{2^{-n} + 1} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_n = 2^n) = \frac{1}{2^n + 1}.$$

Étudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la convergence de la suite $(\mathbb{E}(Y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Conclure.

QUESTION SANS PRÉPARATION 5

On considère un espace euclidien E de dimension $n \geq 2$. On suppose que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E qui vérifie les conditions suivantes :

$$(*) \quad F \cap G = \{0\}, \quad F \cap G^\perp = \{0\}, \quad F^\perp \cap G = \{0\} \quad \text{et} \quad F^\perp \cap G^\perp = \{0\}.$$

1. Pour $n = 2$, donner un exemple de deux sous espaces F et G qui vérifient les conditions $(*)$.
2. On revient au cas général où F et G vérifie $(*)$. Montrer que n est nécessairement pair et dans ce cas donner un exemple de deux tels sous espaces.

QUESTION SANS PRÉPARATION 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ qui est strictement décroissante et qui converge vers 0 en $+\infty$. Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - x f(x).$$

1. Étudier la fonction F . Préciser le comportement de F en $+\infty$ lorsque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.
2. Prouver que si la fonction F est majorée sur $\mathbb{R}_+$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

QUESTION SANS PRÉPARATION 7

Soit une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements tels que : $A_0 = \Omega$, et $\forall n \geq 1$, $P(A_n | A_{n-1} \cap \dots \cap A_0) = \frac{1}{n+1}$. Soit la variable aléatoire X définie par : $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} | \omega \notin A_n\}$.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer son espérance et sa variance.

QUESTION SANS PRÉPARATION 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n + 1$ fois une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \llbracket 1, 2n + 1 \rrbracket$, soit A_k l'évènement « le lancer k a donné Pile et on a obtenu $(n + 1)$ Piles à l'issue des k premiers lancers ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$, pour $k \in \llbracket 1, 2n + 1 \rrbracket$.
2. En déduire que $\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2^k} \binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

QUESTION SANS PRÉPARATION 9

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour chaque $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire Y_n en posant $Y_n(\omega) = [X_1(\omega) \times \dots \times X_n(\omega)]^{\frac{1}{n}}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y_n . Étudier la convergence de la suite $(E(Y_n))$.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une variable certaine.

QUESTION SANS PRÉPARATION 10

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit un entier $k \geq 1$. Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = \llbracket 1, k \rrbracket$.

On considère $k + 1$ variables aléatoires $(X_i)_{0 \leq i \leq k}$ qui suivent une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.

On définit enfin une variable aléatoire Y par : $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Montrer que si, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, X_i a une espérance, alors Y a une espérance.
2. Donner une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(X_i)$ et $E(T)$.

QUESTION SANS PRÉPARATION 11

1. Soit $t > 0$. Montrer que $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{t+x} dx$ existe,

et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall t > 0 : 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{t+x} dx \leq M$.

2. Montrer que $I(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(t)$.

On pourra utiliser l'identité $\frac{e^{-x}}{t+x} = \frac{e^{-x}-1}{t+x} + \frac{1}{t+x}$ pour $t > 0$ et $x \geq 0$.

QUESTION SANS PRÉPARATION 12

Soient X_1, X_2, Y des variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On suppose que X_1 (respectivement X_2) suit une loi de POISSON $\mathcal{P}(\lambda_1)$, (resp. $\mathcal{P}(\lambda_2)$) et que Y est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que $P(Y = 1) = p$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ on définit la matrice :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1^2(\omega) & X_2^2(\omega) \\ Y(\omega)X_1^2(\omega) & X_2^2(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la probabilité que M admette des valeurs propres réelles.
2. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.