Exercice 3.17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in]0,1[$ tel que $p \neq \dfrac{1}{2}$; on pose $q = 1 - p$. Soit $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de $n+1$ variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $Y_k = f(|X_k - X_{k+1}|)$.
   Déterminer la loi de Y_k. Donner son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que la covariance de Y_k et Y_{k+1} est donnée par : $\operatorname{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1-4pq)$.
3. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Étudier l'indépendance de Y_i et Y_j.
4. Exprimer en fonction de $a = 2pq(1-2pq)$ et $b = pq(1-4pq)$ la matrice de covariance C définie par :
   $$C = \left(\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$
5. Pour $n = 2$, diagonaliser la matrice C.

Solution de l'exercice 3.17

1. La variable $Y_k = f(|X_k - X_{k+1}|)$ prend les valeurs $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_k = 1) = 2pq$. Et, par incompatibilité puis indépendance :
$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 1)) \cup ((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0)) = 2pq.$$
Ainsi, $\mathbb{E}(Y_k) = 2pq$ et $V(Y_k) = 2pq(1 - 2pq)$.
2. Par Koenig-Huyghens, on a : $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = \mathbb{E}(Y_k Y_{k+1}) - \mathbb{E}(Y_k)\mathbb{E}(Y_{k+1})$.
Or, $T_k = Y_k Y_{k+1}$ prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$, donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_k) &= \mathbb{P}(T_k = 1) = \mathbb{P}((Y_k = 1) \cap (Y_{k+1} = 1)) \\ &= \mathbb{P}\Big(\big((X_k = 0) \cap (X_{k+1} = 1) \cap (X_{k+2} = 0)\big) \cup \big((X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap (X_{k+2} = 1)\big)\Big) \\ &= p^2 q + q^2 p = pq.\end{aligned}$$
Ainsi, $\mathrm{Cov}\,(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1 - 4pq)$.
3.
   - Si $|j - i| \geqslant 2$, le lemme des coalitions donne l'indépendance de Y_i et Y_j.
   - Sinon, par symétrie de la covariance, on peut supposer que $j > i$ et alors $j = i + 1$.
   Dans ce cas, d'après la question précédente, il n'y a pas indépendance car
   $$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = pq(1 - 4pq) \neq 0 \text{ car } p, q \neq 0 \text{ et } pq \neq \frac{1}{4}.$$
   En effet, par l'étude de la fonction $p \mapsto p(1 - p)$, on a : $p(1 - p) = \dfrac{1}{4} \Longleftrightarrow p = \dfrac{1}{2}$.
4. On a $V(Y_k) = 2pq(1 - 2pq) = a$ et $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = pq(1 - 4pq) = b$. Donc, la matrice C est une matrice tridiagonale à $n + 1$ lignes et $n + 1$ colonnes, avec des a sur sa diagonale principale, des b juste au-dessus et juste au-dessous, et des 0 partout ailleurs.
5. Pour $n = 2$, on a : $C = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$.
Ainsi, C est diagonalisable en base orthonormée, car elle est symétrique réelle.
Comme $b \neq 0$, les valeurs propres de C sont les réels λ tels que le système suivant admette d'autres solutions que la solution nulle :
$$\begin{cases} (a - \lambda)x + by &= 0 \\ bx + (a - \lambda)y + bz &= 0 \\ by + (a - \lambda)z &= 0 \end{cases}$$
Donc soit $\lambda = a$ et $y = 0$ et $x + z = 0$, soit $\lambda \neq a$ et $z = x = -\dfrac{by}{a - \lambda}$ avec :
$$-2\frac{b^2}{a - \lambda} + (a - \lambda) = 0 \Longleftrightarrow (a - \lambda)^2 = 2b^2 \Longleftrightarrow \lambda = a \pm b\sqrt{2} \neq a.$$
Comme $b \neq 0$, on a donc $\mathrm{Sp}\,(C) = \{a - b\sqrt{2}, a, a + b\sqrt{2}\}$.
et : $E_a = \mathrm{Vect}(1, 0, -1)$, $E_{a-b\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, $E_{a+b\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$.
D'où une base orthonormée : $w_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $w_2 = (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2})$, $w_3 = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2})$
(les vecteurs de base initiaux étaient déjà deux à deux orthogonaux car les sous-espaces propres le sont ; et cela reste valable si $b = 0$).