Exercice 1.9

Soit n un entier fixé supérieur ou égal à 2.
Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée **centro-symétrique** si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$$

On note $S = (s_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$s_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n+1-j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Une matrice centro-symétrique est-elle également symétrique ?
2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice centro-symétrique. Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{n+1-i,j} = a_{i,n+1-j}$.
3. (a) Montrer qu'une matrice A est centro-symétrique si et seulement si $AS = SA$.
   (b) En déduire que si A et B sont centro-symétriques, alors AB également et que si A est inversible, alors A^{-1} est centro-symétrique.
4. Soit λ une valeur propre de A centro-symétrique et X un vecteur propre associé.
   Un vecteur $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **symétrique** si pour tout $i \in [\![1,n]\!], z_i = z_{n+1-i}$.
   Un vecteur $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé **antisymétrique** si pour tout $i \in [\![1,n]\!], z_i = -z_{n+1-i}$.
   (a) Montrer que $Y = X + SX$ appartient au sous-espace propre $E_\lambda(A)$.
   (b) En déduire que le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ admet au moins un vecteur propre symétrique ou un vecteur propre antisymétrique.

Solution de l'exercice 1.9

1. La réponse est négative. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Si $a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$, alors en remplaçant i par $n+1-i$ et en laissant le second indice inchangé, on obtient $a_{n+1-i,j} = a_{i,n+1-j}$. On a bien entendu la réciproque.
3. (a) On effectue le calcul de AS et de SA. La matrice SA donne une permutation circulaire sur les lignes de A : si $A = (L_1, L_2, \dots, L_n)$, alors $SA = (L_n, L_{n-1}, \dots, L_1)$.
   La matrice AS donne une permutation circulaire sur les colonnes de A : si $A = (C_1, C_2, \dots, C_n)$, alors $SA = (C_n, C_{n-1}, \dots, C_1)$. Donc $AS = SA$ si et seulement si $a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$.
   (b) On a $AS = SA$ et $BS = SB$. Donc $A(BS) = A(SB) = (AS)B = SAB$ et $AS = SA \Rightarrow A^{-1}AS = A^{-1}SA \Rightarrow SA^{-1} = A^{-1}S$.
4. (a) On écrit $AY = AX + ASX = \lambda X + S(AX) = \lambda(X + SX) = \lambda Y$.
   (b) On écrit $X = \dfrac{X+SX}{2} + \dfrac{X-SX}{2} = Y + Z$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors $X + SX = \begin{pmatrix} x_1 + x_n \\ \vdots \\ x_n + x_1 \end{pmatrix}$ est symétrique et $X - SX = \begin{pmatrix} x_1 - x_n \\ \vdots \\ x_n - x_1 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.