

ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques approfondies

506627

DUMONT

OCTAVE

19/04/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19 / 04 / 2005

Signature

Nom

DUPONT

Prénom (s)

OCTAVE

20 / 20



Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01 / 12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page.

Exercice 1

- ① la série et l'intégrale convergent si $\alpha > 1$ et divergent si $\alpha \leq 1$. C'est le critère de Riemann.

- ② (a) ~~Soit $t \geq 1$. On a $f(t) = \frac{1}{t^2}$~~

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $f: t \mapsto \frac{1}{t^2}$. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée est notée

$$f'. \quad \forall t > 0, f'(t) = -\frac{1}{t^3}, \text{ or } \forall t > 0, \frac{1}{t^3} > 0$$

donc $f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Donc soit n un entier naturel, $n \geq 2$, on a :

$$\forall t \in [n; +\infty[, f(t) \leq f(n) \text{ donc } \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\text{et } \forall u \in [n-1; n], n \geq 1 \text{ donc } f(u) \geq f(n) \text{ donc } \frac{1}{u^2} \geq \frac{1}{n^2}$$

Par croissances de l'intégrale borne croissante, on déduit

$$\forall n \geq 2, \quad \int_{n-1}^n \frac{du}{u^2} \geq \int_{n-1}^n \frac{du}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^2} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$$

$$\text{Ce qui donne :} \quad \text{car} \quad \int_{n-1}^n \frac{du}{u^2} = \frac{n - (n-1)}{n^2} = \frac{1}{n^2} = \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^2}$$

$$\underline{\int_{n-1}^n \frac{du}{u^2} \geq \frac{1}{n^2} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}}$$

(b) On somme alors ces inégalités car les termes sont positifs, puisque $\forall t \geq n \geq 2, \quad \frac{1}{t^2} > 0$ donc $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \geq 0$ par croissance de l'intégrale.

Cela donne : pour $n \geq N \geq 2,$

$$\sum_{k=N}^n \int_{k-1}^k \frac{du}{u^2} \geq \sum_{k=N}^n \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=N}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2}$$

Par relation de Chasles

$$\int_{n-1}^n \frac{du}{u^2} \geq \sum_{k=N}^n \frac{1}{k^2} \geq \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^2}$$

d'où, car $2 > 1$, sachant que les intégrales et la somme convergent (1), on a par limite $n \rightarrow +\infty$:

$$\int_{N-1}^{+\infty} \frac{du}{u^2} \geq \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \geq \int_N^{+\infty} \frac{du}{u^2}$$

$$\text{or } \int_N^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} \right]_N^{+\infty} = \frac{1}{N}$$

D'où on a :

$$\frac{1}{N-1} \geq \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{N}$$

d'où, car comme on a vu, on a pris $N \geq 2$, ^{donc} $N \rightarrow N+1$:

$$\forall N \geq 1, \quad \frac{1}{N} \geq R_N \geq \frac{1}{N+1} \quad \text{CGP}$$

$$\textcircled{3} \quad |S_N - S| = \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| = \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right|$$

$$\underline{|S_N - S| = |R_N| = R_N} \quad \text{car } R_N \geq 0 \text{ par } \textcircled{2}.$$

Donc pour $N_0 = 10^3$, on a par $\textcircled{2}$:

$$R_{N_0} \leq \frac{1}{N_0} = 10^{-3}$$

$$\text{or } \forall N \geq 1, \quad R_{N+1} - R_N = \sum_{n=N+2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{(N+1)^2} \leq 0$$

donc $(R_N)_{N \geq 1}$ est décroissante

donc $\forall N \geq N_0, \quad R_N \leq R_{N_0}$.

On a donc: $\forall N \geq 1000, |S_N - S| \leq 10^{-3}$

(4) On pose: $\forall N \geq 1, T_N = S_N + \frac{1}{N+1}$.

(a) $\forall N \geq 1,$

$$|T_N - S| = |T_N - S_N + S_N - S| = \left| \frac{1}{N+1} - R_N \right| \quad \text{parce qu'à a vu en (3)}$$

$$\text{or } -\frac{1}{N+1} \geq -R_N \geq -\frac{1}{N} \quad (2)(b)$$

$$\text{d'où } 0 \geq \frac{1}{N+1} - R_N \geq \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N} = \frac{N - (N+1)}{N(N+1)} = -\frac{1}{N^2+N}$$

$$\text{donc } |T_N - S| = \left| \frac{1}{N+1} - R_N \right| \leq \frac{1}{N^2+N} \leq \frac{1}{N^2} \quad \text{par décroissance de } f \text{ vu en (2)}$$

ceci $\forall N \geq 1$

(b) En prenant $N_1 = 32$, on a $N_1 < N_0$

$$\text{et } |T_{N_1} - S| \leq \frac{1}{N_1^2} = \frac{1}{32^2} = \frac{1}{1024} \leq \frac{1}{1000}$$

choix

$$\text{et } \forall N \geq N_1, |T_N - S| \leq \frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{N_1^2} \quad \text{par décroissance de } f.$$

d'où $N_1 = 32$ convient,

Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19/04/2005

Signature

Nom

OCTAVE

Prénom (s)

DURONT

20 / 20



Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1 :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,$$

$$u_n(p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}.$$

(5) Soit $p \geq 1$.

$$(a) \forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, \frac{1}{n+i} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

donc, par produit fini d'équivalents,

$$u_n(p) = \prod_{i=0}^p \frac{1}{n+i} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \prod_{i=0}^p \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{p+1}}$$

Donc On a donc : $\boxed{u_n(p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}}}$

(b) $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, n(n+1)\dots(n+p) > 0$ car produit d'entiers positifs non nuls

donc $u_n(p) > 0$

De plus, $p+1 \geq 2$ donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{p+1}}$ converge par critère de Riemann.

Par critère d'équivalence des termes généraux positifs, on a donc

$$\sum_{n \geq 1} u_n(p) \text{ converge} =$$

$$\forall p \geq 1, U(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p).$$

⑥ (a) $u_n(1) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ d'où $a = 1$ et $b = -1$ conviennent.

(b) On a alors :

$$\forall N \geq 2, \sum_{n=1}^N u_n(1) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n}$$

par réécriture $n \mapsto n+1$

par télescopage, $\sum_{n=1}^N u_n(1) = 1 - \frac{1}{N+1}$

par limite $N \rightarrow +\infty$, on a donc, car $\frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$,

$$\underline{U(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = 1}$$

⑦ (a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \geq 1$ et $p \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) &= \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)(n+p)} \\
 &= \frac{1}{n} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} \frac{1}{n+p} \\
 &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \left(\frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} \right) \\
 &= \frac{n+p-n}{n(n+p)} \frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} \\
 &= p \times \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}
 \end{aligned}$$

$$\underline{u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) = p u_n(p).}$$

(b) On raisonne par récurrence,

~~$\forall p \geq 1, \sum_p u(p) = \frac{1}{p!}$~~

Démo...

Initialisation: on a vu en ⑥ (a) que $u(1) = \frac{1}{1!}$ donc $\mathcal{P}_1$ est vrai.

Hérédité: Soit $p \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_p$ est vrai.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

~~$\forall n \geq 1, \text{ par } \textcircled{a}, u_n(p+1) = \frac{1}{p+1} (u_n(p) - u_{n+1}(p))$~~

~~Par suite, $\forall N \geq 2, \sum_{n=1}^N u_n(p+1) = \frac{1}{p+1} \sum_{n=1}^N (u_n(p) - u_{n+1}(p))$~~

~~par la même réécriture : $\frac{1}{p+1} \left(\sum_{n=1}^N u_n(p) - \sum_{n=2}^{N+1} u_n(p) \right)$~~

~~$\sum_{n=1}^N u_n(p+1) = \frac{1}{p+1} (u_1(p) - u_{N+1}(p))$~~

~~$$\text{or } U_{Nn}(p+1) \sim \frac{1}{Nn} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$~~

~~$$\text{d'ou } U_{Nn}(p+1) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$~~

~~$$\text{donc par limite } N \rightarrow \infty,$$~~

~~$$U(p+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p+1) = \frac{1}{p+1} u_n(p+1) = \frac{1}{(p+1)} \frac{1}{1 \times (1+1) \dots (n+p+1)}$$~~

⑦ (b) On a des $p \geq 2$, $n \geq 1$, $u_n(p) = \frac{1}{p} (u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1))$
 Soit $N \geq 2$, par somme :

$$\sum_{n=1}^N u_n(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^N (u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1))$$

$$\text{réduction membre} = \frac{1}{p} \left(\sum_{n=1}^N u_n(p-1) - \sum_{n=2}^{N+1} u_n(p-1) \right)$$

$$\text{résultat} = \frac{1}{p} (u_1(p-1) - u_{N+1}(p-1))$$

$$\text{or } u_{N+1}(p-1) \sim \frac{1}{Np} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \text{ d'où par limite } N \rightarrow \infty,$$

$$U(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(p) = \frac{1}{p} (u_1(p-1) - 0) = \frac{1}{p} \frac{1}{1 \times (1+1) \dots (1+p-1)} = \frac{1}{p \cdot p!}$$

Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19 / 04 / 2005

Signature

Nom

OCTAVE

Prénom(s)

OURAUT

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 /

12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1 :

$$P(n) \text{ vraie}, P_p : \forall n \geq 1, \frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2(n+1) \dots (n+p)} + \sum_{k=1}^p \frac{(k-1)!}{n^2}$$

$$\text{Initialisation: } \frac{1!}{n^2(n+1)} + \sum_{k=1}^1 \frac{(k-1)!}{n^2} = \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{n+1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2}$$

donc P_1 est vraiVéracité: Soit $p \in \mathbb{N}^*$ / P_p est vraie.

$$\begin{aligned} \frac{(p+1)!}{n^2(n+1) \dots (n+p+1)} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(k-1)!}{n^2} &= \sum_{k=1}^p \frac{(k-1)!}{n^2} + \frac{p!}{n^2(n+1) \dots (n+p+1)} + \frac{(p+1)!}{n^2(n+1) \dots (n+p+1)} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{(k-1)!}{n^2} + \frac{p! \frac{n^2(n+1) \dots (n+p+1)}{n(n+1) \dots (n+p+1)} + (p+1)!}{n^2(n+1) \dots (n+p+1)} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{(k-1)!}{n^2} + \frac{np! + (p+1)!}{n^2(n+1) \dots (n+p+1)} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{(k-1)!}{n^2} + \frac{p! (n+p+1)}{n^2(n+1) \dots (n+p+1)} \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{(k-1)!}{n^2} + \frac{p!}{n^2(n+1) \dots (n+p)} \end{aligned}$$

dans par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=1}^{p+1} (k-1)! u_n(k) + \frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} = \frac{1}{n^2}$$

pour des $\mathcal{P}_p \Rightarrow \mathcal{P}_{p+1}$, or $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Par récurrence, on a donc : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_p$ est vraie. (Q.P.D.)

(b) On veut l'égalité :

$$\forall N \geq 1, \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = p! \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^p (k-1)! u_n(k)$$

$$\text{donc } p! \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} - \sum_{k=1}^p (k-1)! \sum_{n=1}^N u_n(k)$$

or $\sum_{n \geq 1} u_n(k)$ converge pour tout $k \geq 1$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car

on l'a déjà vu, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)}$ converge.

On a de plus, par limite $N \rightarrow +\infty$:

$$S = p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(k)$$

$$= p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! \frac{1}{k k!} \quad \text{par } \textcircled{7} (b)$$

$$S = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \quad \text{(Q.P.D.)}$$

③ Soit $(N, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

§ $g_p: x \mapsto \frac{1}{x^{p+2}}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$\forall x > 0, g_p'(x) = -\frac{(p+2)}{x^{p+3}} \quad \text{or} \quad x^{p+3} > 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x^{p+3}} > 0$$

donc $g_p'(x) < 0$ donc g_p est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

or $\forall i \in [0; p]$, ~~on a~~ $\forall n \in [N+1; +\infty[$, on a :

$$2 \leq n \leq n+i \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n+i} \geq \frac{1}{n} \geq 1$$

donc p en effectuant un produit d'inégalité, qui est ici utile car tout est plus grand que 1, on a :

→

$$\prod_{i=0}^p \frac{1}{n+i} = \frac{1}{\underbrace{n(n+1) \dots (n+p)}_{p+1 \text{ termes}}} \leq \frac{1}{n^{p+1}}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{n \leq n(n+1) \dots (n+p)} \leq \frac{1}{n^{p+2}}$$

or $\forall t \in [n-1; n]$, cas n°1, par décroissance de g_p ,

$$\frac{1}{t^{p+2}} \geq \frac{1}{n^{p+2}} \quad \text{donc, par croissance de l'intégrale}$$

$$\int_{n-1}^n \frac{1}{t^{p+2}} dt \geq \int_{n-1}^n \frac{1}{n^{p+2}} dt = \frac{1}{n^{p+2}}$$

Par suite, $\forall n \geq N+1$,

$$\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n^{p+2}} \leq \sum_{n=N+1}^M \int_{n-1}^n \frac{1}{t^{p+2}} dt = \int_N^M \frac{1}{t^{p+2}} dt \quad \text{par Charles}$$

par limite $N \rightarrow +\infty$, car l'intégrale converge ainsi que la série (car $p+2 > 1$),

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+2}} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^{p+2}} = \left[-\frac{1}{p+1} \frac{1}{t^{p+1}} \right]_N^{+\infty} = \frac{1}{(p+1)N^{p+1}}$$

et donc, comme les séries évanouissent convergent bien, on a finalement,

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\dots(n+p)} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+2}} \leq \frac{1}{(p+1)N^p}$$

car on a une série à termes positifs,

(10) Ici, $p=3$.

D'après (8) (6),

$$\begin{aligned} |U_N - S| &= \left| \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} + 3! \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} - 3! \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} \right| \\ &= 6 \left| - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} \right| \end{aligned}$$

$$|U_N - S| = 6 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} \leq \frac{6}{4} \frac{1}{N^4} = \frac{3}{2N^4}$$

d'après (9)

On prend $N_2 = 8$. On a alors $N_2^4 = 2^4 \times 4^4 = 16 \times 256$

$$\text{Donc } |U_{N_2} - S| \leq \frac{3}{2 \times 16 \times 256} < \frac{1}{8 \times 256} < 10^{-3}$$

$\approx \frac{3}{4} < 1$

et donc, $\forall N \geq N_2$,

$$|U_N - S| \leq \frac{3}{2N^4} \leq \frac{3}{2N_2^4} \leq 10^{-3}$$

donc $N_2 = 8$ convient

par décroissance de $g_2: x \mapsto \frac{1}{x^4}$

Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19/04/2008

Signature

Nom

DUPONT

Prénom(s)

OCTAVE

20/20



Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04

/

12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1:

(11)

On remarque que l'approximation est meilleure pour
 U_N que pour T_N , qu'est-elle si différente que pour S_N .

En effet, le nombre de termes nécessaires (N) pour une
précision suffisante est bien moindre pour U_N que pour T_N
 que pour S_N .

C'est bien ce qu'on avait remarqué: pour être proche de 5×10^{-3} on a eu besoin de S_{1000} , de T_{32} et de U_8 .

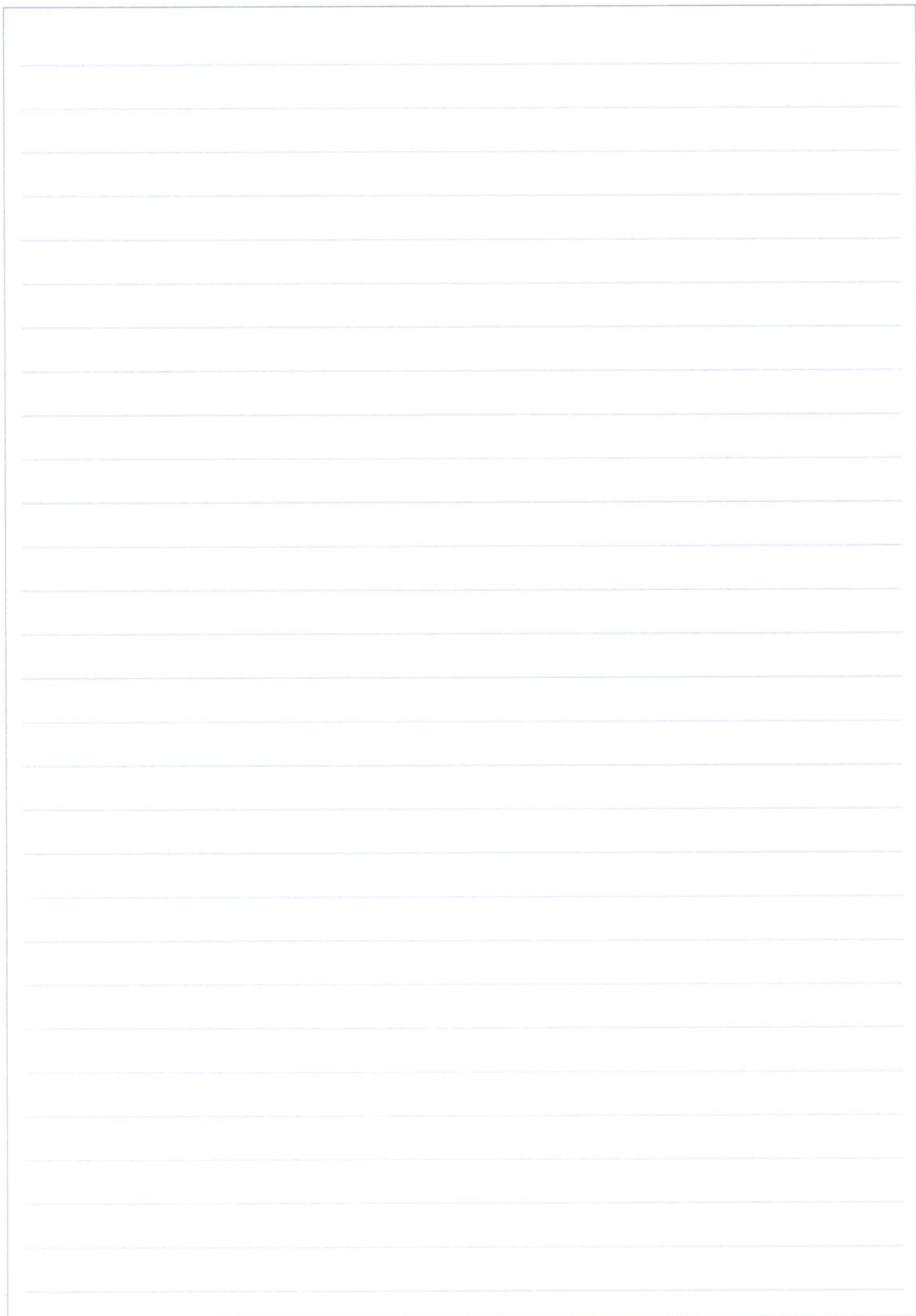
Une approche très vite de la valeur de S .

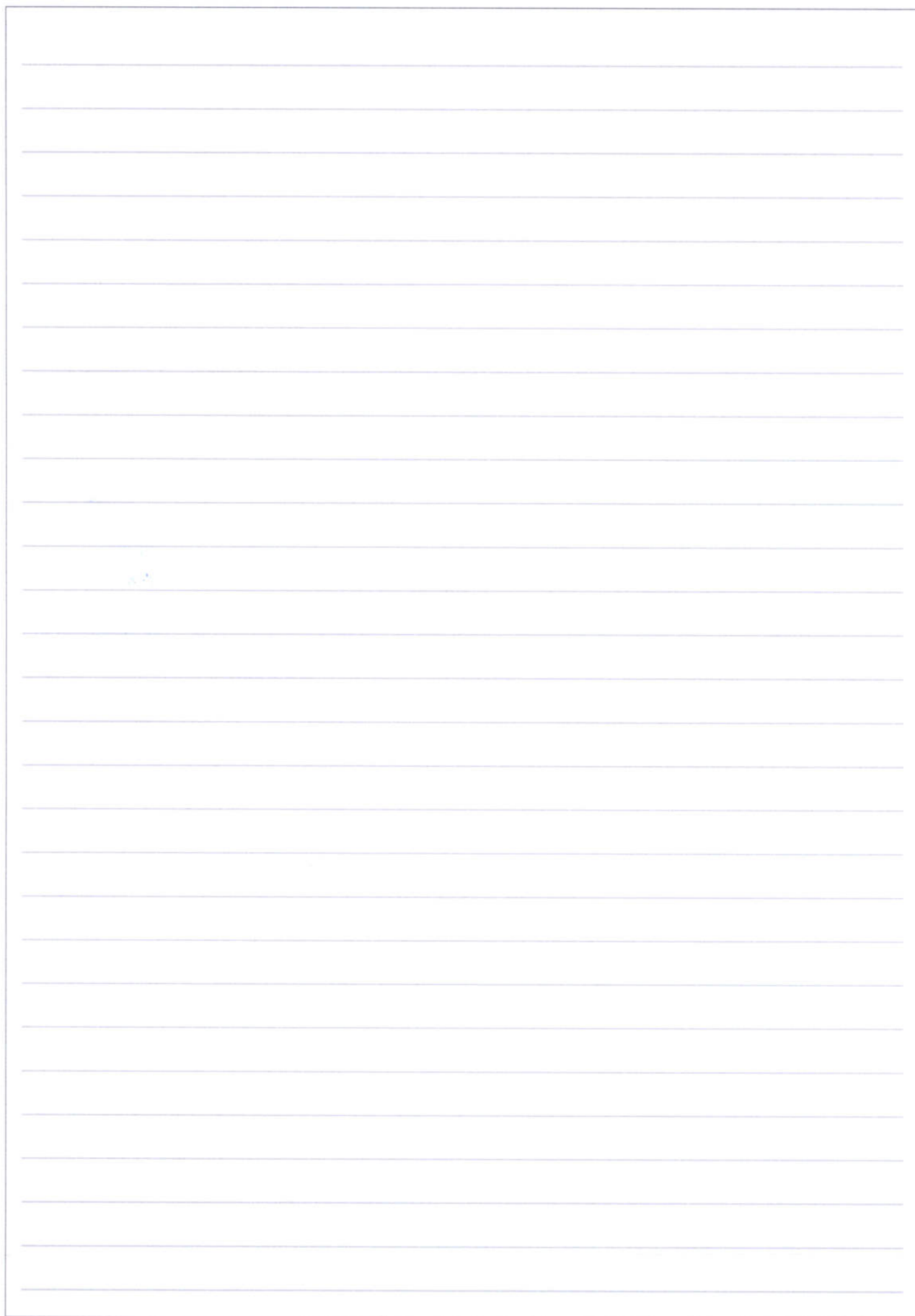
NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

A large rectangular area with horizontal blue lines, intended for writing. The lines are evenly spaced and cover the entire width of the area. The area is bounded by a thin black line on the top and sides, and a thin blue line on the bottom. The background is white.





Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19 / 04 / 2005

Signature

Nom

DUMONT

Prénom (s)

OCTAVE

20 / 20



Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 19

Numéro de table

05

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 2 : $n \in \mathbb{N}^+$ Partie 1 : Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ où les x_i sont $n+1$ distincts

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{cases}$$

① (a) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(x_0), \dots, (\lambda P + Q)(x_n)) \\ &= (\lambda P(x_0) + Q(x_0), \dots, \lambda P(x_n) + Q(x_n)) \text{ par définition de la somme de polynômes} \\ &= \lambda (P(x_0), \dots, P(x_n)) + (Q(x_0), \dots, Q(x_n)) \end{aligned}$$

$$\Phi(\lambda P + Q) = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q)$$

 Φ est linéaire

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. si $\Phi(P) = 0$, alors $(P(x_0), \dots, P(x_n)) = (0, \dots, 0)$
 donc $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_i) = 0$ donc P coïncide avec le polynôme nul en $n+1$ points distincts. Comme $\deg(P) \leq n$, on en déduit $P = 0$.
 Φ étant linéaire, on a bien $\Phi = \{0\}$ et donc
 Φ est injective.

(b) Par théorème du rang, on a alors :

$$\dim \ker \Phi + \operatorname{rg} \Phi = \dim(\mathbb{R}_n[x])$$

$$0 + \operatorname{rg}(\Phi) = n+1$$

$$\text{donc } \dim(\operatorname{Im} \Phi) = n+1$$

$$\text{ou } \operatorname{Im} \Phi \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

donc car $\dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$, on en déduit :

$\operatorname{Im} \Phi = \mathbb{R}^{n+1}$, donc Φ est surjective donc bijective.

Donc pour tout élément $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique

$P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\Phi(P) = (y_0, \dots, y_n)$

c'est à dire tel que

$$\underline{P(x_0) = y_0, \dots, P(x_n) = y_n}.$$

② En posant $\text{Soit } i \in \mathbb{C}[0; n]$,

$$\text{On pose } \forall j \in \mathbb{C}[0; n], \quad y_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

par ①, il existe un unique $L_i \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\forall j \in \mathbb{C}[0; n], \quad L_i(x_j) = y_{ji}$$

$$\underline{\text{C'est à dire : } \forall j \in \mathbb{C}[0; n], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

③ ici, on a $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2, 3)$

$$L_0 = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = -\frac{1}{24} (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$L_1 = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-2)(1-3)} = \frac{1}{4} (x+1)(x-2)(x-3)$$

$$L_2 = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{3} (x+1)(x-1)(x-3)$$

$$L_3 = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} = \frac{1}{8} (x+1)(x-1)(x-2)$$

En effet, ces polynômes s'annulent bien en les ³réels qu'il faut (car un facteur du produit est nul) et quand on évalue, la division permet d'affirmer que $\forall i \in [0; 3], L_i(x_i) = 1$.

④ $\forall i \in [0; n],$ on pose $P_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \in \mathbb{R}_n(\mathbb{R})$.

qui est un polynôme car produit de polynômes.

De plus, $\deg(x - x_j) = 1$ donc $\deg(P_i) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \deg(x - x_j) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n 1 = n$

Si $k=i$, alors $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$ et donc $P_i(x_i) = 1$

Si $k \neq i$, alors $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_k - x_j) = (x_k - x_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j) = 0$

et donc $P_i(x_k) = 0$

avec la convention que le produit vide vaut 1

donc $\forall k \in [0; n], P_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$

donc, par unicité des L_i , on a :

$\forall i \in [0; n], L_i(x) = P_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$.

Donc le degré de L_i est n car on a vu que $\deg(P_i) = n$.

Le coefficient dominant de $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$ est clairement 1.

donc le coefficient dominant de L_i est $\frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$

$$\mathcal{L} = (L_0, \dots, L_n)$$

⑤ Soit $(P, Q) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{C})$.

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k) Q(x_k) = \sum_{k=0}^n Q(x_k) P(x_k) = \langle Q, P \rangle$$

donc $\langle, \rangle$ est symétrique

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' \in \mathcal{R}_n(\mathbb{C})$, qui ne désigne pas le polynôme dérivé de P .

$$\langle \lambda P + P', Q \rangle = \sum_{k=0}^n (\lambda P + P')(x_k) Q(x_k) = \sum_{k=0}^n (\lambda P(x_k) Q(x_k) + P'(x_k) Q(x_k))$$

$$\langle \lambda P + P', Q \rangle = \lambda \sum_{k=0}^n P(x_k) Q(x_k) + \sum_{k=0}^n P'(x_k) Q(x_k) = \lambda \langle P, Q \rangle + \langle P', Q \rangle$$

Donc $\langle, \rangle$ est linéaire à gauche, donc bilinéaire par symétrie.

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n P(x_k) P(x_k) = \sum_{k=0}^n (P(x_k))^2 \geq 0 \text{ donc } \langle, \rangle \text{ est } \underline{\text{positive}}$$

$$\text{de plus, } \langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^n P(x_k)^2 = 0 \Rightarrow \forall k \in \{0, \dots, n\}, P(x_k)^2 = 0$$

car les termes sont positifs

ce qui implique : $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_k) = 0$ et alors $\mathcal{L}(P) = 0$ ce qui implique $P = 0$ car $\mathcal{L}$ est injective (1b))

donc $\langle, \rangle$ est définie. C'est un produit scalaire.

Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19 / 04 / 2005

Signature

Nom

DUMONT

Prénom(s)

OCTAVE

20 / 20

Ecricome

Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06 / 12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page.

⑥ Soit $i \in \{0, \dots, n\}$ et $j \in \{0, \dots, n\}$.

$$\langle L_i, L_i \rangle = \sum_{k=0}^n L_i(x_k)^2 \quad \text{or si } k \neq i, L_i(x_k) = 0$$

$$\text{donc } \langle L_i, L_i \rangle = L_i(x_i)^2 = 1^2 = 1$$

$$\text{Si } i \neq j, \text{ alors } \langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^n L_i(x_k) L_j(x_k)$$

or $L_i(x_k) L_j(x_k)$ est nul si et seulement si $L_i(x_k) \neq 0$ et $L_j(x_k) \neq 0$, si et seulement si $x_k = x_i$ et $x_k = x_j$, ce qui est impossible car on a supposé $j \neq i$ et les x_k sont distincts.

$$\text{Donc } \langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^n 0 = 0$$

$$\text{On a alors } \langle L_i, L_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Donc $\mathcal{L}$ est orthogonale pour $\langle, \rangle$. | Donc c'est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ car elle admet $n+1$ éléments et $\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n+1$.
donc $\mathcal{L}$ est une base orthogonale de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ pour $\langle, \rangle$.

⑦ Par unicité de la décomposition dans une base, il suffit de montrer: $\forall P(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $P(x) = \sum_{k=0}^n P(x_k) L_k(x)$

Évaluons en x_i , $i \in \{0, \dots, n\}$. il vient,

$$\sum_{k=0}^n P(x_k) L_k(x_i) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n P(x_k) L_k(x_i) + P(x_i) L_i(x_i)$$

par définition des $L_i = 0 + P(x_i) \cdot 1$
 $= P(x_i)$

donc $P(x)$ et $\sum_{k=0}^n P(x_k) L_k(x)$ coïncident en les $(x_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$,

donc par la propriété rappelée dans le sujet, $P(x) = \sum_{k=0}^n P(x_k) L_k(x)$

donc les coordonnées de P dans $\mathcal{L}$ sont $(P(x_0), \dots, P(x_n))$.

Partie 2:

$N_0 = 1$ et $x_i \in \{1, \dots, n\}$,

$$N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

⑧ Ici, $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2, 3)$

(a) $N_0 = 1$

$$N_1 = (x + 1)$$

(en annulant N_i à $N_i(x)$, pour $1 \leq i \leq n$)

$$N_2 = (x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$$

$$N_3 = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

(b) *

~~10/10~~ ~~10/10~~

$$N_0(x_0) = 1 = N_0(x_1) = N_0(x_2) = N_0(x_3)$$

$$N_1(x_0) = 0 ; N_1(x_1) = 1+1=2 ; N_1(x_2) = 2+1=3 \text{ et } N_1(x_3) = 3+1=4$$

$$N_2(x_0) = 0 ; N_2(x_1) = 0 ; N_2(x_2) = 2^2-1=3 \text{ et } N_2(x_3) = 3^2-1=8$$

$$N_3(x_0) = 0 ; N_3(x_1) = 0 ; N_3(x_2) = 0 \text{ et } N_3(x_3) = (3+1)(3-1)(3-2) = 8$$

Donc par $\oplus$, on a la coordonnée de la base $\mathcal{L}$:

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ et } N_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

(c) M est échelonnée donc on a clairement $\text{rg}(M) = 4$ donc M est inversible car $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\text{Soit } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \text{ quelconque et } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

$$MY = Z \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_1 + y_2 = z_2 \\ y_1 + 3y_2 + 3y_3 = z_3 \\ y_1 + 4y_2 + 8y_3 + 8y_4 = z_4 \end{cases}$$

⑨ Soit $i \in \mathbb{N}$, $\deg(x - x_j) = 1$ pour $j \in \{0, \dots, i-1\}$
 donc $\deg(N_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \deg(x - x_j) = \sum_{j=0}^{i-1} 1 = i$

et $\deg(N_0) = 0$

Donc $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est échelonnée en degré, donc libre.

Ayant nos vecteurs dans $\mathcal{R}_n(\mathbb{C})$ de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathcal{R}_n(\mathbb{C})$.

⑩ (a) Soit $x \in \mathbb{C}$, on a $N_0(x) = 1$

et $\sum_{k=0}^n L_k(x) = L_i(x) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n L_k(x) = 1 + 0 = 1$ par définition de L_i

donc, N_0 et $\sum_{k=0}^n L_k$ coïncident sur $n+1$ réels distincts, et sont dans $\mathcal{R}_n(\mathbb{C})$,

$$\underline{N_0 = \sum_{k=0}^n L_k}$$

(b) Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Pour $i=0$, avec la convention que le produit vide vaut 1, on a $N_0 = \sum_{k=0}^n L_k$ par la question précédente.

Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19/04/2005

Signature

Nom

DURONT

Prénom(s)

OCTAVE

20 / 20

Ecricone

Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07

12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page.

⑩ Il ne reste qu'à traiter les cas $i \in \{1; n\}$.

Soit $l \in \{0; n\}$, on a :

$$\text{si } l < i, \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k \quad \text{n'a aucun } h=l \text{ car } l \notin \{i; n\}.$$

Donc, en évaluant en x_l , on a :

$$\sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k(x_l) = 0 \quad \text{car } k \neq l \Rightarrow L_k(x_l) = 0$$

$$\text{et } N_i(x_l) = \prod_{j=0}^{i-1} (x_l - x_j) = 0 \quad \text{car } l \in \{0; i-1\}.$$

si $l > i$, alors $l \in \{i; n\}$ et donc :

$$\sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k(x_l) = \prod_{j=0}^{i-1} (x_l - x_j) L_l(x_l) + \sum_{\substack{k=i \\ k \neq l}}^n L_k(x_l) \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j)$$

$$\text{par définition des } L_i = N_i(x_l) \times 1 + \sum_{\substack{k=i \\ k \neq l}}^n 0$$

$$= N_i(x_l)$$

$$\text{Donc } \forall l \in \{0; n\}, N_i(x_l) = \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k(x_l)$$

Par le critère déjà évoqué, on déduit :

$$N_i = \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k$$

- 11) Si on a donc que la coordonnée de N_i , $i \in \{0; n\}$, en L_n , $k \in \{i; n\}$, est $\prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j)$ et qu'elle est nulle si $k < i$.

Donc on a: $P_{x,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \prod_{j=0}^{i-1} (x_1 - x_j) & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \end{pmatrix}$ la nature de passage

plus précisément, $\forall (i,j) \in \{1, n+1\}^2$

$$(P_{x,n})_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \prod_{k=0}^{i-1} (x_j - x_k) & \text{sinon. On le note } \alpha_{i,j} \end{cases}$$

Si la base N était orthonormée, alors $P_{x,n}$ serait ~~orthonormée~~

telle que $P_{x,n} P_{x,n}^T = I_n$ c'est la nature de passage d'une base orthonormée vers une autre base orthonormée.

Or En effectuant ce produit, on a que la diagonale ne sera pas constituée uniquement de 1 (sauf le premier élément).

En effet, par produit naturel,

$${}^t J_{2,n} J_{2,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & \alpha_{1,1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \alpha_{n,n} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Et on voit bien que le deuxième élément diagonal est :

$$({}^t J_{2,n} J_{2,n})_{2,2} = \alpha_{1,1} \alpha_{1,1} + 0$$

Plus encore, le produit ne donne pas nécessairement des éléments nuls en dehors de la diagonale. ~~On ne peut pas~~

Pour N n'est pas orthogonale.

(12) On a vu que $(N_0, \dots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Pour il y a existence et unicité des $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P_n(x) = a_0 N_0(x) + \dots + a_n N_n(x)$$

(13) (a) ~~On~~ (On aurait déjà noté numpy et en la ~~array~~ ^{array} ~~x et y~~)

def prodX(x, i, h):

 p = 1

 for j in range(h+1):

 if j != i:

 p = p * (x[i] - x[j])

 return p

(b) def coeff(x, y):

A = Y[0] * np.ones(np.shape(Y))

for k in range(np.shape(Y)):

if k > 0:

A[k] = 0

for i in range(h+1):

A[k] = A[k] + (Y[i] / prodX(x, i, k))

return A

(c)

|

(14) (a) $P_n(x_0) = a_0 + a_1 N_1(x_0) + \dots + a_n N_n(x_0)$

on sait $k \geq 1$, on a $N_i(x_0) = \prod_{j=0}^{i-1} (x_0 - x_j)$

Par ailleurs le produit $\prod_{j=0}^{i-1} (x_0 - x_j)$ admet toujours un facteur $(x_0 - x_0)$ dès que $i \geq 1$, donc $N_i(x_0) = 0$.

On a alors $P_n(x_0) = a_0$, or $P_n(x_0) = y_0$. Donc $a_0 = y_0$

$\forall i \in \{0, n\}$, on a vu que $\deg(N_i) = i$. Donc seul N_n est de degré n .

Donc le coefficient de degré n de P_n est celui de N_n .

Or celui de $N_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ est clairement 1, d'où

(le coefficient de degré n de P_n est $1 \times a_n = a_n$.)

Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19/04/2005

Signature

Nom

DURONT

Prénom(s)

OCTAVE

20/20



Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

08

12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 2:

(14) (b) $\forall h \in \{0; n\}$,

$$\sum_{i=0}^h y_i L_i(x_h) = y_h L_h(x_h) + \sum_{i=0}^{h-1} y_i L_i(x_h) = y_h \cdot 1 + 0 = P(x_h)$$

par définition de L_i et des y_i

donc P et $\sum_{i=0}^n y_i L_i$ coïncident à $n+1$ points distincts. Comme ils sont dans $\mathbb{R}_n(x)$, ils sont donc égaux :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

(c) On a vu en (14) que le coefficient de degré n de L_i pour $i \in \{0; n\}$, est :

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

Donc, le coefficient dominant de $P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$

étant la somme des coefficients dominants des $y_i L_i(x)$, on a :

$$a_n = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

car a_n est le coefficient de degré n de P_n .

(15) Soit $h \in \mathbb{N}, h \geq 0$. $Q_h(x) = \sum_{j=0}^h a_j N_j(x)$.

(a) $\forall j \in \{0, \dots, h\}$, $\deg(N_j) = j \leq h$ donc $N_j \in \mathbb{R}_h[x]$
 donc $Q_h \in \mathbb{R}_h[x]$ comme somme d'éléments de $\mathbb{R}_h[x]$.

(b) $\forall i \in \{0, \dots, h\}$,

$$Q_h(x_i) = \sum_{j=0}^h a_j N_j(x_i)$$

or $N_j(x) = \sum_{n=j}^h \sum_{l=0}^{j-1} (x_n - x_l) L_n$

donc

$$N_j(x_i) = \sum_{n=j}^h \sum_{l=0}^{j-1} (x_n - x_l) L_n(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \sum_{l=0}^{j-1} (x_i - x_l) & \text{sinon} \end{cases}$$

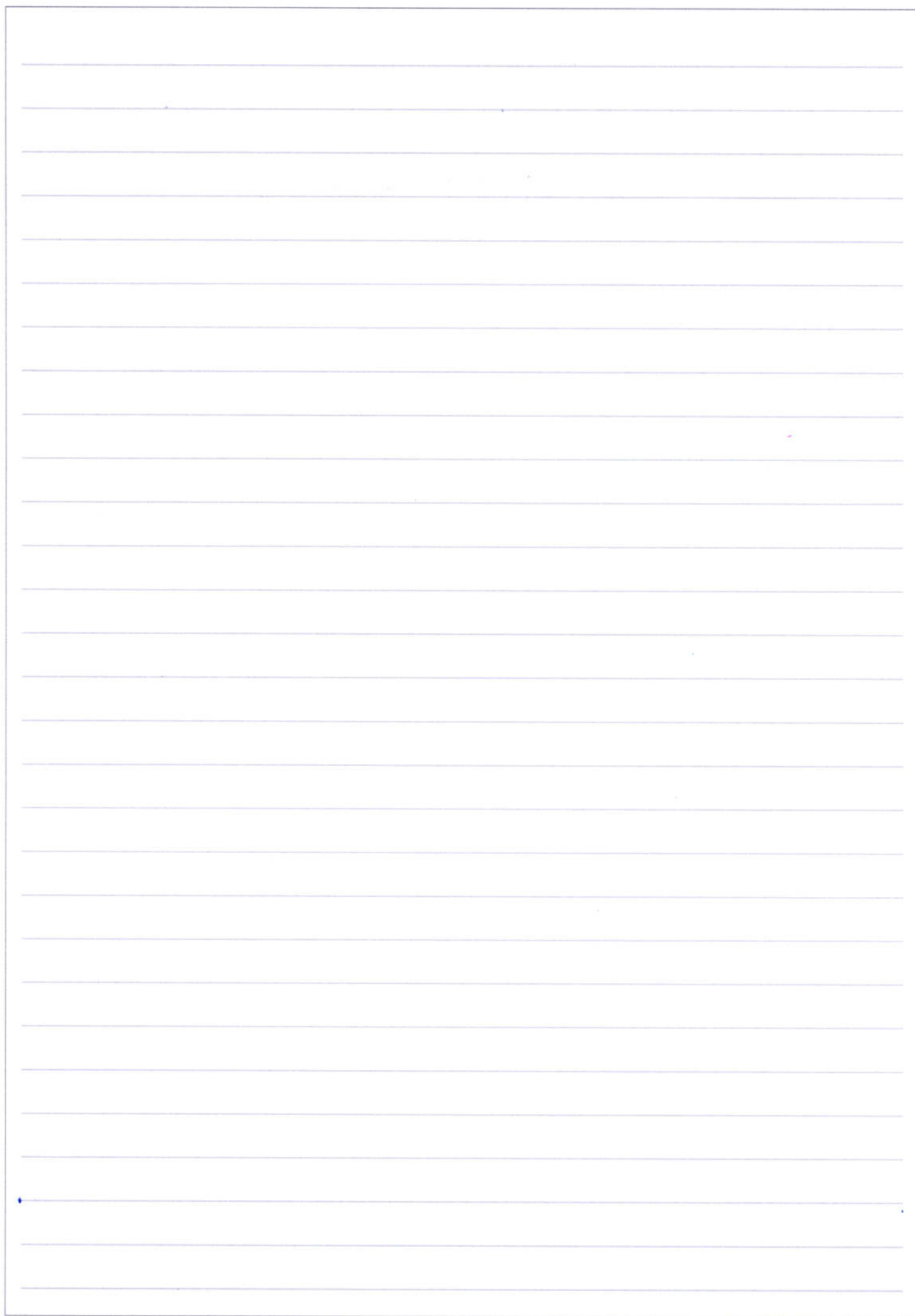
car tous les termes en $L_n(x_i)$, $n \geq j$, s'annulent

Donc $Q_h(x_i) = \sum$

j'obtient le résultat

(15) (c) Donc Q_n et P_n sont des éléments de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ qui coïncident
sur les points $\{x_i, i \in \{0; n\}\}$, donc $P_n = Q_n$.

Donc $P_n(x) = a_0 N_0(x) + \dots + a_n N_n(x).$



Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19 / 04 / 2005

Signature

Nom

DURON R

Prénom (s)

OCTAVE

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

09 /

12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page...

Problème :

$$a > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

$$\textcircled{1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \pi x^2 + \pi a^2 > 0 \text{ car } a > 0 \text{ et } \pi x^2 \geq 0 \\ \text{donc } \frac{1}{\pi(x^2 + a^2)} > 0 \text{ donc } \underline{f(x) > 0}.$$

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ car fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas (il est strictement positif).

Soit $A > B$ deux réels.

$$\int_B^A f(x) dx = \int_B^A \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} dx = \frac{a}{\pi} \int_B^A \frac{1}{x^2 + a^2} dx \text{ par linéarité}$$

On pose le changement de variable injectif croissant (et $\mathcal{C}^1$ donc)

$$au = x \Rightarrow du = dx$$

$$\text{On a : } \int_B^A f(x) dx = \frac{a}{\pi} \int_{\frac{B}{a}}^{\frac{A}{a}} \frac{a}{a^2 u^2 + a^2} du = \frac{a^2}{\pi a^2} \int_{\frac{B}{a}}^{\frac{A}{a}} \frac{1}{u^2 + 1} du \\ \text{par linéarité}$$

d'où $\int_B^A f(x) dx = \frac{1}{\pi} (\arctan(\frac{A}{a}) - \arctan(\frac{B}{a}))$ en reconnaissant arctan.

d'où $\lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^A f(x) dx = \frac{1}{\pi} (\arctan(\frac{A}{a}) - (-\frac{\pi}{2})) = \frac{\arctan(A/a)}{\pi} + \frac{1}{2}$

par continuité de arctan et car
 $\arctan(u) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ quand $u \rightarrow -\infty$

d'où $\int_{-\infty}^A f(x) dx$ converge.

par suite $A \rightarrow +\infty$, on a alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge

et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2\pi} + \frac{1}{2} = 1$

donc f est une densité de probabilité.

② $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition associée à f est donnée par :

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{\arctan(x/a)}{\pi} + \frac{1}{2}$ d'après ce qu'on a vu car densité

③ $f(x) \sim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{\pi x^2}$ donc $x f(x) \sim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{\pi x}$

car $x \mapsto x f(x)$ est positive sur $[1; +\infty[$, le critère

d'équivalence d'intégrales positives donne
 car l'intégrale de $\frac{1}{t}$ dt diverge (Riemann)

que l'intégrale de $x p(x)$ dt diverge $\pm \infty$, donc diverge absolument,

donc une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy n'admet pas d'espérance

④ X suit la loi de Cauchy standard

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P\left(X \leq \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$$

car $a > 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(aX \leq x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow aX$ suit une loi de Cauchy de paramètre a .

⑤ soit $k \in \mathbb{R}^+$.

j'achète les résultats

⑥ Soit $h \in \mathbb{R}^+$ et X suit une loi de Cauchy de paramètre μ
 Y indépendante de X suivant une loi de Cauchy standard.

(a) Une densité de $X+Y$ est alors donnée, comme on a admis, que c'est une densité et que Y et X sont indépendantes, par le produit de convolution suivant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\pi(t^2+k^2)} \frac{1}{\pi((x-t)^2+1)} dt$$

$$= \frac{k}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$\varphi(x) = \frac{k}{\pi^2} [G(t)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{k}{\pi} \left[\lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) - \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) \right]$$

car G est une primitive de g .

(b) $t^2+k^2 \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} t^2$ et $(x-t)^2+1 \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} t^2$

donc $\frac{t^2+k^2}{(x-t)^2+1} \underset{t \rightarrow \pm\infty}{\sim} 1$ donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{2} \arctan\left(\frac{t+k^2}{(x-t)^2+1}\right) = 0$ par

calculs de l'arc.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{\pi}{2}$ par calculs de l'arc.

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(t-x) = \frac{\pi}{2}$ de même

Donc par opérations sur la limite,

$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} G(t) = \frac{\beta}{k} \frac{\pi}{2} + \gamma \frac{\pi}{2}$

Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

19 / 04 / 2005

Signature

Nom

DURONT

Prénom(s)

OCTAVE

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

10

/ 12

Numéro de table

087

Commencez à composer dès la première page...

Problème :

$$\textcircled{6} (a) \text{ de même, } \frac{t^2 + 4t}{(x-t)^2 + 1} \sim 1 \text{ dès } \lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^2 + 4t}{(x-t)^2 + 1} \right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{t}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan(t-x)$$

$$\text{D'où } \varphi(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \frac{\beta}{x} \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \gamma \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \varphi(x) &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta}{x} + \gamma + \frac{\beta}{x} + \gamma \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\beta}{x} + \gamma \right). \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\ln x}{x^2(x+1)^2} \text{ par } \textcircled{6}(c)$$

d'où φ $X+Y$ avec une loi de Cauchy de paramètre $\ln x$.

- ⑦ $\forall h \in \mathbb{R}^+, \mathcal{P}_h$: Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendants suivant une loi de Cauchy de paramètre a , alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi de Cauchy de paramètre $h a$.

Initialisation:

~~Par (a), cela revient à dire que~~

X suit la loi de Cauchy de paramètre $h a$ dès $\mathcal{P}_1$ est vrai

Hérédité: Soit $h \in \mathbb{R}^+ / \mathcal{P}_h$ est vrai.

Soit X_{n+1} telle que X_{n+1} suit la loi de Cauchy de paramètre a et ~~est~~ que $X_1, \dots, X_{n+1}$ sont mutuellement indépendants.

Alors, $\forall i \in \{1, n+1\}$, par (a), $\frac{1}{a} X_i$ suit la loi de Cauchy standard.

De plus, par hypothèse de récurrence, $\frac{1}{a} X_1 + \dots + \frac{1}{a} X_n$ suit la loi de Cauchy de paramètre $h a$. En notant $Y = \frac{X_{n+1}}{a}$ et $X = \frac{1}{a} X_1 + \dots + \frac{1}{a} X_n$,

⑥ (b) donne que $\frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n+1} X_i$ suit la loi de Cauchy de paramètre

$h a$, et donc par (a) on a que $\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ suit la loi de Cauchy de paramètre a . donc $\mathcal{P}_h \Rightarrow \mathcal{P}_{h+a}$. $\mathcal{P}_1$ est vrai, par récurrence on a:

$\forall h \in \mathbb{R}^+, \mathcal{P}_h$ est vrai. $\square$ CQFD

Partie 2:

⑧ Soit $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

$$Y = a \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Y \leq x) &= P\left(a \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right) \leq x\right) \\ &= P\left(\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right) \leq \frac{x}{a}\right) \text{ car } a > 0\end{aligned}$$

or $\arctan$ est la fonction réciproque de $\tan :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$. donc :

$$\begin{aligned}P(Y \leq x) &= P\left(\arctan\left(\tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)\right) \leq \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right) \\ &= P\left(\pi U \leq \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= P\left(U \leq \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{or } \forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan(y) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\\ \text{donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{\arctan(y) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{et donc } 0 \leq \frac{\arctan(y) + \frac{\pi}{2}}{\pi} \leq 1$$

$$\text{d'où } P(Y \leq x) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi}{2}}{\pi}$$

donc $Y \overset{\text{est une}}{\sim} \text{loi de Cauchy de paramètre } a$.

⑨

`import numpy as np
import random as rd
def Cauchy(a):`

`x = rd.random()`

`return a * np.tan(np.pi() * (x - 0.5))`

$n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$ suit la loi $\vec{a}$ et sont indépendants.

(10) def réalisation(n, a):
 ~~$U = np.random(0, 1, n)$~~
 $U = np.zeros(n)$
for i in range(n):
 $U[i] = \text{cauchy}(a)$
return U

(11) def moyennes(n, a):
 $U = \text{réalisation}(n, a)$
 $X = U[0] * np.ones(n)$

for i in range($1, n$):
 $X[i] = X[i-1] * (i-1)/i + U[i]/i$ # car $\bar{X}_n = \frac{\bar{X}_{n-1} + X_n}{n}$
return X

(12) Il semble que la variance empirique soit très élevée,
puisque les séries statistiques sont très différentes.

Cela provient probablement du fait que les variables considérées
n'admettent pas d'espérance, et donc que la loi des grands
nombres ne s'applique pas.

Numéro d'inscription

50662A



Né(e) le

15 / 04 / 2005

Signature

Nom

DUARANT

Prénom(s)

OCTAVE

20 / 20

Ecricone

Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

11

/ 12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page...

Partie 3:

$$n > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |X_n| \leq n \\ 0 & \text{si } |X_n| > n \end{cases}$$

$$\bar{Y}_n = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n}$$

$$Y_n(-2) = \{0, 1\}$$

$$(13) \quad P(Y_n = 1) = P(|X_n| \leq n)$$

$$= P(-n \leq X_n \leq n)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{n}{a}\right) + \frac{1}{2} - \arctan\left(\frac{-n}{a}\right) - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{n}{a}\right) + \arctan\left(\frac{n}{a}\right) \right)$$

car arctan est impaire

$$P(Y_n = 1) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{a}\right)$$

$$\text{donc } Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{a}\right)\right)$$

(14) Les (Y_i) sont indépendantes et admettent une espérance et une variance commune car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{a}\right)\right)$.

Par les deux grands nombres, on a donc :

$$\underline{Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{IP}} E(Y_n) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{a}\right) \quad (a \neq 0)}$$

$$\text{car } Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\sqrt{n}}{a}\right)\right),$$

(15) (-) ~~$\rightarrow 0$~~ ,

$$\tan :]0; \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{donc on a } \arctan : \mathbb{R}_+^* \rightarrow]0; \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{donc } \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(y) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{en particulier, } 0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } \underline{0 < p(a) < 1} \text{ car } \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On a } \left(p(a) - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\text{donc } p(a)^2 - \frac{2}{2} p(a) + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\text{donc } p(a) - p(a)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\underline{p(a)(1-p(a)) \leq \frac{1}{4}}$$

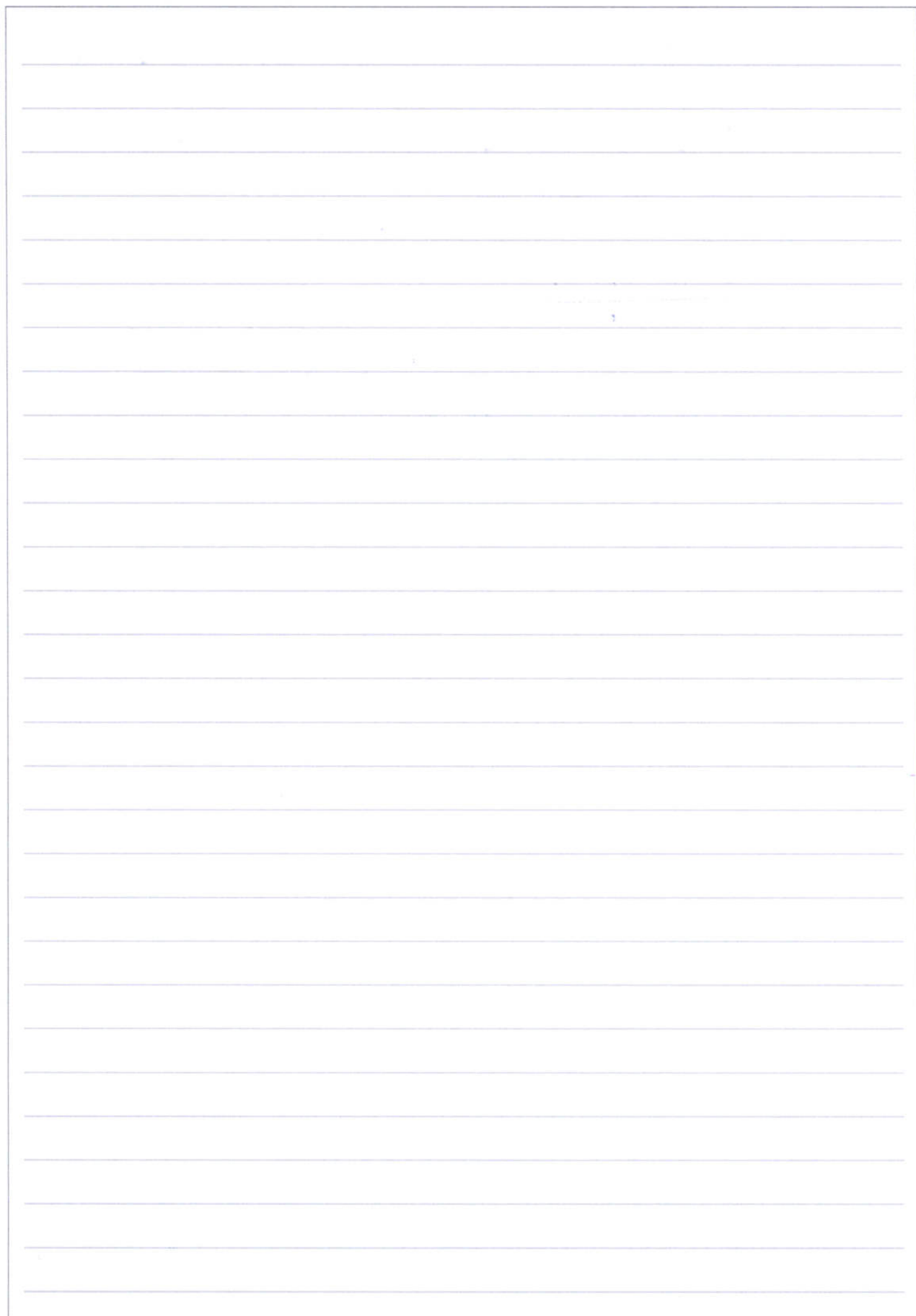
(b) Φ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1 \text{ et } \Phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

Donc par Théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z > 0$ tel que $\Phi(z) = 0,975$.

$$\text{De plus, } \Phi \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall x > 0, \Phi'(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} > 0$$

donc Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc ce réel $z > 0$ est unique.



Numéro d'inscription

506627



Né(e) le

12 / 04 / 2005

Signature

[Signature]

Nom

DUNOAT

Prénom (s)

OCTAVE

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☒ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

12

12

Numéro de table

051

Commencez à composer dès la première page...

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

