ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques approfondies

504364

CHALANCON

ARTHUR

06/02/2004

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription 504364

Né(e) le 06/02/2004

Signature

Nom CHALANCON

Prénom (s) ARTHUR

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 01/07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page...

Problème :

Partie 1:

1) + f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ $(x^2+a^2>0)$

+ f est positive sur $\mathbb{R}$

+ Soient $A, B \in \mathbb{R}^2$. tq $A<0<B$

$$\int_A^B \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\,dx = \frac{a}{\pi \times a^2}\int_A^B \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_A^B$$

$$= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{B}{a}\right) - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{A}{a}\right)$$

lorsque $B \to +\infty$

$$\int_A^B \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}\,dx \xrightarrow[B\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{A}{a}\right).$$

lorsque $A \to -\infty$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{A}{a}\right)\right) \xrightarrow[A \to -\infty]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi(x^2+a^2)} dx$ converge et vaut 1

donc f est une densité de probabilité.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

$= \int_{-\infty}^{x} \frac{a}{\pi(t^2+a^2)} dt$

Soit $B < 0$

$\int_{B}^{x} \frac{a}{\pi(t^2+a^2)} dt = \frac{1}{\pi}\left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right)\right]_B^x$

$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{B}{a}\right)$

$\xrightarrow[B \to -\infty]{} \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\pi} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$

3) $E(X)$ existe si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$

converge absolument, c'est-à-dire
si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{a}{\pi(t^2+a^2)}\, dt \quad \text{converge}$$

or $\frac{t\, a}{\pi(t^2+a^2)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{a\, t}{\pi t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{\pi\, t}$

or $\frac{a}{\pi t}$ diverge en $+\infty$ d'après les

critères de comparaison de Riemann

$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ diverge
donc <u>X n'admet pas d'espérance.</u>

4) Supposons, X suive une loi de Cauchy standard.
ainsi $\forall x \in \mathbb{R}\ f_X(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$

posons $Y = aX$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f_Y(x) = \frac{1}{|a|} \times f_X\left(\frac{x}{a}\right)$

$$= \frac{1}{|a|} \times \frac{1}{\pi\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{a} \times \frac{1}{\pi(x^2+a^2)} \times a^2 = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$$

On vient donc de démontrer que Y suit une loi de Cauchy de paramètre a.

Réciproquement par un procédé similaire en partant de la variable Y.

$$\frac{1}{a} Y = X$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = |a| \; f_Y(xa)$$
$$= a \times \frac{a}{\pi((xa)^2 + a^2)}$$
$$= \frac{a^2}{a^2} \times \frac{1}{\pi(x^2+1)} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

donc X suit une loi de Cauchy standard

Ainsi on a bien l'équivalence !

5) Soit $h \in \mathbb{N}^*$ Soit $x \in \mathbb{R}^*$

ⓐ $\forall t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \frac{\alpha t + \beta}{t^2 + h^2} + \frac{\alpha(x-t) + \gamma}{(x-t)^2 + 1}$$
$$= \frac{(\alpha t + \beta)((x-t)^2+1) + (\alpha(x-t) + \gamma)(t^2+h^2)}{(t^2+h^2)((x-t)^2+1)}$$

$=$

Numéro d'inscription 50 4364

Né(e) le 06/02/2004

Signature

Nom CHALANCON

Prénom (s) ARTHUR

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet 1 ou 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 02 / 07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page...

b) On a :

$$\begin{cases} B+y = \alpha x \\ \alpha(x^2+1-h^2) = 2\beta x \\ B(x^2+1) + \alpha x h^2 + y h^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B+y = \alpha x \\ (x^2+1-h^2)\underbrace{(B+y)}_{x} = 2Bx \\ B(x^2+1) + \alpha x h^2 + y h^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} B+y = \alpha x \\ B(x^2+1-h^2) + y(x^2+1-h^2) = 2Bx^2 \\ B(x^2+1) + Bh^2 + yh^2 + yh^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} B+y = \alpha x \\ B(x^2+1-h^2) + y(x^2+1-h^2) = 2Bx^2 \\ B(x^2+1+h^2) + 2yh^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} B+y = \alpha x \\ B(1-h^2) + y(x^2+1-h^2) = Bx^2 \\ \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

c) on a :

$$\begin{cases} \beta(x^2+h^2+1)+2\gamma h^2 = 1 \\ 2\beta+\gamma(x^2+h^2+1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta(x^2+h^2+1)+2\gamma h^2 = 1 \\ \end{cases}$$

d) $\forall t \in \mathbb{R}$

G est dérivable par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad G'(t) = \frac{\alpha}{2} \times \frac{(2t(x-t)^2+2x)}{((x-t)^2+1)^2} \times \frac{((x-t)^2+1)}{(t^2+h^2)} +$

$\frac{\beta}{h} \times \frac{1}{h} \times \frac{1}{1+\left(\frac{t}{h}\right)^2} + \gamma \times \frac{1}{1+(t-x)^2}$

$= \alpha \frac{(t(x-t)^2+x)}{((x-t)^2+1)(t^2+h^2)} + \frac{\beta}{h^2+t^2} + \gamma \frac{1}{1+(t-x)^2}$

$= \frac{\alpha(t(x-t)^2+x) + \beta(1+(t-x)^2) + \gamma(h^2+t^2)}{(h^2+t^2)((x-t)^2+1)}$

$= g(t).$

donc G est une primitive de g

6) Soit $h \in \mathbb{N}^*$

a) X, Y sont deux variables indépendantes.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(x-t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\pi(t^2+h^2)} \times \frac{1}{\pi((x-t)^2+1)}\, dt$$

$$= \frac{h}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt$$

g admet comme primitive G.

$$= \frac{h}{\pi^2}\left(\lim_{t\to+\infty} G(t) - \lim_{t\to-\infty} G(t)\right)$$

b) Déterminons $\lim_{t\to+\infty} G(t) - \lim_{t\to-\infty} G(t)$

$$\lim_{t\to+\infty} G(t) = \frac{\alpha}{2}\lim_{t\to+\infty} \ln\left(\frac{t^2+h^2}{(x-t)^2+1}\right) + \frac{\beta}{h}\frac{\pi}{2} + \gamma\frac{\pi}{2}$$

or $\dfrac{t^2+h^2}{(x-t)^2+1} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{t^2}{t^2} \xrightarrow[+\infty]{} 1$

or $\ln(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.

donc $\lim_{t\to+\infty} G(t) = \dfrac{\beta}{h}\dfrac{\pi}{2} + \gamma\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\beta+\gamma h}{h}\right)$.

de même on montre que

$$\lim_{t\to-\infty} G(t) = -\frac{\beta}{h}\frac{\pi}{2} - \gamma\frac{\pi}{2}$$

ainsi $\lim_{t\to+\infty} G(t) - \lim_{t\to-\infty} G(t) = \dfrac{\beta}{h}\pi + \gamma\pi = \dfrac{\pi}{h}(\beta+\gamma h)$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\varphi(x) = \frac{h}{\pi^2} \frac{\pi}{h} (B + yh)$$

$$= \frac{1}{\pi} (B+yh) \underset{5(c)}{=} \frac{1}{\pi} \frac{h+1}{x^2+(h+1)^2}$$

on reconnait une loi de Cauchy de parametre $h+1$.

donc $X+Y$ suit une loi de Cauchy de parametre $h+1$

7) $\forall h \in \mathbb{N}^*$ montrons .. P_h : " si $X_1, \dots X_h$ sont mutuellement indépendantes et suivent la loi Cauchy de parametre a, alors $X_1 + \dots + X_h$ suit la loi de Cauchy de parametre ha."

I si h egale 1. X_1 suit une loi de Cauchy de parametre a et donc P_1 est vrai

Supposons qu'il existe $h \in \mathbb{N}^+$ tel que P_h soit vrai
posons $Y = \sum_{i=1}^{h} X_i$

montrons $Y + X_{h+1}$ suit une loi de Cauchy de parametre $(h+1)a$.

Y suit une loi de Cauchy de parametre ha
posons $X_{h+1} = a_{h+1} T_{h+1}$ où T_{h+1} suit une loi Cauchy standard.

d'après la question 4)
donc d'après le produit de convolution (6)a)
entre $Y + X_{h+1}$ admet une densité
et suit une loi de Cauchy de parametre $(h+1)a$

Numéro d'inscription 504364

Né(e) le 06/02/2004

Signature

Nom CHALANÇON

Prénom (s) ARTHUR

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 03/07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page...

Partie II :

8) $Y(\Omega) = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(a \tan\left(\left(U - \frac{1}{2}\right)\pi\right) \leq x\right)$

$= P\left(\tan\left(\left(U - \frac{1}{2}\right)\pi\right) \leq \frac{x}{a}\right)$ ← $a > 0$

$= P\left(\left(U - \frac{1}{2}\right)\pi \leq \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ $t \mapsto \arctan(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$= P\left(U \leq \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$ ← $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$

donc Y suit bien une loi de Cauchy de paramètre a.

9)
```
def cauchy(a):
    y = a * np.tan(np.pi*(rd.random() - 1/2))
    return y
```

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

10) def realisation (n, a):
```
    A = np.zeros(n)
    for k in range(0, n):
        A[k] = cauchy(a)
    return A.
```

11) def moyennes (n, a)
```
    B = np.zeros(n)
    for k in range(0, n):
        B[k] = 1/n * realisation(n,a)
    return B.
```

12) on en déduit que la variable X suivant une loi de Cauchy de paramètre a n'admet pas d'espérance car les graphes sont fortement differents. Cela fait sens avec la question 3)

Partie 3:

13) $Y_n(\Omega) = [\![0,1]\!]$

$P(Y_n = 1) = P(|X_n| \leq M)$
$= P(-M \leq X_n \leq M) = F(M) - F(-M)$

ainsi $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}er(F(M) - F(-M))$

$P(Y_n = 1) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{a}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(-\frac{M}{a}\right) \cancel{*} - \frac{1}{2}$

$= \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{A}\right)$ $t \mapsto \arctan(t)$ est impaire

14) $Y_1, \ldots Y_n$ sont mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance.
Ainsi d'après la loi faible des grands nombres
comme $\overline{Y_n}$ est une moyenne empirique

$$\overline{Y_n} \xrightarrow{P} E(\underbrace{Y_n}_{Y_n \hookrightarrow Ber(\rho(a))}) = \rho(a) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{a}\right)$$

15) a) $\forall a > 0$ Soit $M > 0$

$\frac{M}{a} > 0$ donc $\arctan\left(\frac{M}{a}\right) > 0$
$t \mapsto \arctan(t)$ croissante sur $\mathbb{R}$.

donc $\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{a}\right) = \rho(a) > 0$

posons $f(M) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{a}\right)$
f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
ainsi $\forall M \in \mathbb{R}_+^*$ $f(M) < \lim_{M \to +\infty} f(M)$

or $\lim_{M \to +\infty} f(M) = 1$

donc $f(M) < 1$

ie $\varphi(a) < 1$

posons $x = \varphi(a)$ donc $x \in [0, 1]$

posons $g(x) = x(1-x)$

g est dérivable sur $[0, 1]$ et $g'(x) = 1 - 2x$

$1-2x \geq 0$

$\frac{1}{2} \geq x$

ainsi g admet un maximum en $\frac{1}{2}$

et $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ainsi $\forall x \in [0,1] \quad x(1-x) \leq \frac{1}{4}$

donc $p(a)(1-p(a)) \leq \frac{1}{4}$

15) ϕ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

de plus ϕ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$

de plus $\phi(x) \xrightarrow[-\infty]{} 0 < 0,975$

et $\phi(x) \xrightarrow[+\infty]{} 1 > 0,975$

donc d'après le théorème de la bijection

$\exists ! \, z \in \mathbb{R}$ tq $\phi(z) = 0,975$

a $\phi(0) = \frac{1}{2} < 0,975$

donc $\phi(0) < \phi(z)$ $x \mapsto \phi(x)$ est strictement croissante

donc $0 < z$

donc $\exists ! \, z \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\phi(z) = 0,975$

16) On remarque que lorsque $n \to +\infty$ les intervalles de confiance de a se réduisent autour de valeur 1. Donc plus la valeur de n est grande, plus il y a de chances que la valeur se trouve proche de 1

17) On attend d'un intervalle de confiance qu'il soit précis, c'est-à-dire avec un taux de prédiction de la valeur finale élevé. On remarque que plus $\frac{\pi}{a}$ est petit, plus l'intervalle est précis

Numéro d'inscription 504364

Né(e) le 06/02/2004

Signature

Nom CHALANÇON

Prénom (s) ARTHUR

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 04/07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page...

Ex 1 :

① $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est converge si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \leq 1$.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \leq 1$.

2) a) posons $f(t) = \frac{1}{t^2}$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(t) = -\frac{2t}{t^2} < 0$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Ainsi $\forall t \in [n, n+1]$ et $\forall h \in [n-1, n]$

$$f(t) \leq f(n) \leq f(h)$$

d'où $\int_n^{n+1} f(t)\, dt \leq \int_n^{n+1} f(n)\, dt$ par croissance de l'intégrale comme $n+1 > n$

i.e $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} \leq \frac{(n+1-n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

de même en intégrant entre $[n-1,n]$, par croissance de l'intégrale

$$\int_{n-1}^{n} f(n)\,dt \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,dt$$

Ainsi on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{t^2}\,dt \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,dt$$

b) $\forall N \in \mathbb{N}^*$ en sommant de $N+1$ à $A \in \mathbb{N}$ tq $A > N+1$ l'inégalité précédente

$$\sum_{n=N+1}^{A} \int_{n}^{n+1} \frac{1}{t^2}\,dt \leq \sum_{n=N+1}^{A} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{A} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$\int_{N+1}^{A+1} \frac{1}{t^2}\,dt \leq \sum_{n=N+1}^{A} \frac{1}{n^2} \leq \int_{N}^{A} \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$\left[-\frac{1}{t}\right]_{N+1}^{A+1} \leq \sum_{n=N+1}^{A} \frac{1}{n^2} \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_{N}^{A}$$

$$-\frac{1}{A+1} + \frac{1}{N+1} \leq \sum_{n=N+1}^{A} \frac{1}{n^2} \leq -\frac{1}{A} + \frac{1}{N}$$

lorsque $A \to \infty$ comme la série est convergente (D1)

$$\frac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \frac{1}{N}$$

3) $|S_N - S| \xrightarrow[N\to+\infty]{} |S - S| = 0$

donc $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall N \geq N_0$ $|S_N - S| < 10^{-3}$ par définition de la limite

posons $N_0 = 100000000$

alors $\forall N \geq N_0$ $|S_N - S| < 10^{-3}$

4) a) $\forall N \in \mathbb{N}^*$

$$|T_N - S| = \left|S_N + \frac{1}{N+1} - S\right|$$

$$= \left|S_N - S + \frac{1}{N+1}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N+1}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{N+1} - R_N\right|$$

$$= R_N - \frac{1}{N+1} \quad \text{car } R_N \geq \frac{1}{N+1}$$

2)b)

$$\leqslant \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \leqslant \frac{1}{N(N+1)} \leq \frac{1}{N^2}$$

ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $|T_N - S| \leq \frac{1}{N^2}$

b) On a donc

$$0 \leqslant |T_N - S| \leqslant \frac{1}{N^2}$$

or $\frac{1}{N^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

donc par encadrement quand $N \to +\infty$

$T_N - S \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

donc par définition de la limite

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall N \geq N_1 \quad |T_N - S| \leq 10^{-3}$

posons $N_1 = 10000000 \quad < N_0$

5) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$

(a) $U_n(p) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{p+1}}$

(b) $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad p+1 > 1$

et $U_n(p) > 0$

alors $\sum_{n \geq 1} U_n(p)$ converge

6) a) $U_n(1) = \dfrac{1}{n(n+1)}$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(n+1)a + bn}{n(n+1)}$$
$$= \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$$

par identification on a :

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

ainsi $U_n(1) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

b) Soit $N > n$

$$\sum_{n=1}^{N} U_n(p) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \qquad m = n+1$$

Numéro d'inscription 50364

Né(e) le 06/02/2004

Signature

Nom CHALANCON

Prénom (s) ARTHUR

20 / 20

Écricome Épreuve : Mathématiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 05 / 07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page

$= 1 - \frac{1}{N+1}$ (par télescopage)

$\xrightarrow[N \to +\infty]{} 1.$

ainsi $\underline{U(1) = 1.}$

7) a) $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$$U_n(p-1) - U_{n+1}(p-1) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+1+1)\dots(n+1+p-1)}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)}$$

$$= \frac{n+p-n}{n(n+1)\dots(n+p)} = \frac{p}{n(n+1)\dots(n+p)} = \underline{p\,U_n(p).}$$

b) $\forall p \in \mathbb{N}^*$ posons $P(p)$: " $U(p) = \frac{1}{p\,p!}$ "

Initialisation : $U(1) = 1$ (d'après 6b)

et $\frac{1}{1 \times 1!} = 1$.

donc $P(1)$ est vraie

Supposons qu'il $p \in \mathbb{N}^*$ tq $P(p)$ soit vraie
montrons $P(p+1)$ est vraie.

$$U(p+1) = \sum_{m=1}^{+\infty} U_m(p+1)$$

a $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $U_n(p+1) = \frac{1}{p+1}\left(U_n(p) - U_{n+1}(p)\right)$

donc $U(p+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p+1}\left(U_n(p) - U_{n+1}(p)\right)$) séries convergentes

$$= \frac{1}{p+1}\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(p) - \frac{1}{(p+1)}\sum_{n=1}^{+\infty} U_{n+1}(p)$$

$$= \frac{1}{p+1} U(p) - \frac{1}{p+1}\left(U(p) - U_1(p)\right)$$

$$= \frac{1}{p+1}\frac{1}{p\,p!} - \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{p!\times p} - \frac{1}{(1+p)!}\right)$$

$$= \frac{1}{p+1}\frac{1}{(p+1)!}$$

Ce qui achève la récurrence

8) a) Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$
Initialisation : $p=1$.

$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1!}{n^2(n+1)} + 0!\,U_n(1) = \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}$

$= \frac{1+n}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2}$ donc l'initialisation est vraie

Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq la relation soit vraie

$$\frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)} + \sum_{k=1}^{p+1} (k-1)!\, U_n(k)$$

$$\cancel{= \frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(k-1)!}{n(n+1)\dots(n+k)}}$$

$$\cancel{= \frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{(k-1)!\,(n-1)!}{(n+k)!}}$$

$$= \frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)} + \sum_{k=1}^{p} (k-1)!\,U_n(k) + p!\,U_n(p+1)$$

hypothèse de récurrence

$$= \frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)} + \frac{1}{n^2} - \frac{p!}{n^2(n+1)\dots(n+p)} + \frac{p!}{n(n+1)\dots(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{(p+1)! - p!\,(n+p+1) + p!\,n}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{n^2} + \frac{(p+1)!\,(n+p+1) - p!\,(n+p+1-n)}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{n^2} \quad \frac{(p+1)! - (p+1)!}{n^2(n+1)\dots(n+p+1)} = \frac{1}{n^2}$$

Ce qui achève la récurrence

b) $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n^2(n+1)-(n+p)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2\, n^p} = \frac{1}{n^{p+2}}$$

or $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $p+2 > 1$

et $\forall n \geq 1$ $\dfrac{1}{n^2(n+1)-(n+p)} > 0$

donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)-(n+p)}$ converge

Ainsi en sommant l'égalité de la question 8) a) de n allant de 1 à $+\infty$:

on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)-(n+p)} + \sum_{k=1}^{p} (k-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(k)$$

$$S = p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2(m+1)-(n+p)} + \sum_{k=1}^{p} (k-1)!\ U(k)$$

$U(k) = \dfrac{1}{k\, k!}$

$$= p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)-(n+p)} + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}$$

g) posons $\forall x > 0$ $f(x) = \dfrac{1}{x^{p+2}}$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

d'où $\forall x > 0$ $f'(x) = \dfrac{-(p+2)}{x^{p+1}} < 0$

donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Numéro d'inscription 504364

Né(e) le 06 / 02 / 2004

Signature

Nom CHALANCON

Prénom (s) ARTHUR

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2 (Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 66 / 07

Numéro de table 002

Commencez à composer dès la première page...

ainsi: $\forall h \in [n-1, n]$

$$\frac{1}{n^{p+2}} \leq \frac{1}{h^{p+2}}$$

par croissance de l'intégrale comme $n > n-1$

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^{p+2}} dh \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{h^{p+2}} dh$$

$$\frac{1}{n^{p+2}} \leq$$

10) $\forall N \in \mathbb{N}^*$

$$|U_N - S| = \left| \frac{49}{36} + 6 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(-)(n+3)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right|$$

11) On peut voir que $|U_n - S|$ tend "plus vite" vers 0 que $|T_N - S|$ et $|S_N - S|$ et $|S_N - S|$ tend "moins vite" vers 0 que $|T_N - S|$ et $|U_N - S|$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Ex 2:

a) $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\forall \alpha > 0$

$$\phi(\alpha P + Q) = (\alpha P(x_0) + Q(x_0), \ldots, \alpha P(x_n) + Q(x_n))$$

$$= \alpha\, \phi(P) + \phi(Q)$$

donc ϕ est linéaire

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$

$P \in \mathrm{Ker}(\phi) \iff \phi(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$

$\iff (P(x_0) \ldots P(x_n)) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}$

donc $\forall i \in [\![0, n]\!]$ $P(x_i) = 0$

ce qui veut dire que P admet $n+1$ racines

et P est de degré inférieur ou égal à n

donc $P = 0$

donc $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0\}$

Ainsi ϕ est injective

b) $\dim \mathrm{Im}\, \phi = \dim \mathbb{R}_n[x] - \dim \mathrm{Ker}(\phi)$

$= n+1$

donc $\dim \mathrm{Im}\, \phi = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$

donc ϕ est surjective

Ainsi Φ est bijective
ce qui prouve $\exists ! (y_0, - y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq
$P(x_0) = y_0 \quad — \quad P(x_n) = y_n$

2) $\forall i \in [\![0, n]\!]$
$\forall j \in [\![0, n]\!]$
$$\Phi(L_i) = (L_i(x_0) — \quad L_i(x_n))$$
$$= e_i = (0 — \underset{i}{1} — 0)$$

Ainsi d'après la bijectivité de Φ,
il existe un unique polynome L_i tel que
$\forall j \in [\![0, n]\!] \ L_i(x_j) \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3) $L_0(X) = Q \times (X-1)(X-2)(X-3)$
or $\deg L_0 \leq 3$ donc $Q \in \mathbb{R}$.
$$L_0(-1) = Q \times (-2)(-3)(-4)$$
$$= -24 Q = 1.$$
donc $Q = -\frac{1}{24}$

$$L_0(X) = -\frac{1}{24} (X-1)(X-2)(X-3)$$

Suivant $L_1(X) = \alpha (X+1)(X-2)(X-3)$
$$L_1(1) = \alpha \, 2 \times (-1)(-2)$$
$$= 4\alpha = 1$$
donc $\alpha = \frac{1}{4}$
$$L_1(X) = \frac{1}{4} (X+1)(X-2)(X-3)$$

$$L_2(x) = \alpha\,(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$L_2(2) = \alpha(3)(-1)$$

$$= -3\alpha = 1$$

$$\alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\underline{L_2(x) = -\frac{1}{3}(x+1)(x-1)(x-3)}$$

$$L_3(x) = \alpha\,(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$L_3(3) = \alpha\, 4 \times 2 \times 1 = 8\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{8}$$

$$\underline{L_3(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2)}$$

4) $\forall i \in [\![0,n]\!]$

$\forall j \in [\![0,n]\!]$ tq $i \neq j$

$$L_i(x_j) = 0$$

donc $$L_i(x) = Q \times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

or $\deg L_i \leq n$

et $\deg\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)\right) = n$

donc $Q \in \mathbb{R}$.

$$L_i(x_i) = Q \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1$$

donc $$Q = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Numéro d'inscription 504364

Né(e) le 06/02/2004

Signature

Nom CHALANCON

Prénom (s) ARTHUR

20 / 20

Ecricome Épreuve : Mathematiques

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2
(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 07 / 07

Numéro de table 002

Commencez à composer sur la première page

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$

Ainsi on a $\deg L_i = \deg \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} (X - x_j) = n$

donc $\deg L_i = n$
et son coefficient dominant sera $\frac{1}{\prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} (x_i - x_j)}$

5) $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$
$\langle Q, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)\, Q(x_k) = \langle P, Q \rangle$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique
$\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$ $\forall \alpha > 0$
$\langle \alpha P + Q, R \rangle = \sum_{k=0}^{n} (\alpha P(x_k) + Q(x_k)) R(x_k)$

$= \alpha \sum_{k=0}^{n} P(x_k) R(x_k) + \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) R(x_k)$

$= \alpha \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

donc $\langle - \rangle$ est linéaire par rapport à la 1ère variable
et donc par symétrie $\langle - \rangle$ est bilinéaire

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^2(x_k) \geq 0 \quad \text{(somme de termes positifs)}$$

$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\langle P, P \rangle = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} P^2(x_k) = 0$$

donc $P^2(x_k) = 0$ d'où $P(x_k) = 0$

$\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(x_k) = 0$

donc P admet $n+1$ racines or P est un polynome de degre n donc $P = 0$

ainsi $\langle - \rangle$ est un produit scalaire

b) posons $\mathcal{L} = (L_0, \dots L_n)$

$\mathcal{L}$ est composé de polynômes de degrés distincts

donc la famille est libre

et $\text{card}(B) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$

donc $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

$\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]$ tq $i \neq j$

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k) L_j(x_k) = 0.$$

donc $\mathcal{L}$ est une base orthogonale et $\langle L_1, L_1 \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_1^2(x_k) = L_1^2(x_1) = 1.$

et ceci est vrai $\forall i \in [\![0, n]\!]$

donc $\mathcal{L}$ est une base orthonormée

7)

Partie II :

8) a) $N_0 = 1$

$N_1(x) = \prod_{j=0}^{0} (x - x_j) = x - x_0 = (x+1)$

$N_2(x) = \prod_{j=0}^{1} (x - x_j) = (x+1)(x-1)$

$N_3(x) = \prod_{j=0}^{2} (x - x_j) = (x+1)(x-1)(x-2)$

b)

$$M = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$(N_0(x_0) - N_0(x_3)) = (1,1,1,1)$

$(N_1(x_0), N_1(x_1), N_1(x_2), N_1(x_3))$
$= (0, 2, 3, 4)$

$(N_2(x_0), N_2(x_1), N_2(x_2), N_2(x_3))$
$= (0, 0, 3, 8)$

$(N_3(x_0) - N_3(x_3)) = (0, 0, 0, 8)$

M est triangulaire inférieure donc elle est inversible.

13) a)

```
def prodX(x, i, k):
  U = 0
  for a in (0, k):
      if a ≠ i:
         U = np.log(X - a) + U
  return np.exp(U)
```

15) a) $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j N_j(x)$

$\forall j \in [\![0, k]\!] \qquad N_j \in \mathbb{R}_n[X]$

donc $Q_k \in \mathbb{R}_n[X]$