

ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques approfondies

503158

FLOQUET

ELIOTT

03/11/2005

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

5 0 3 1 5 8



Né(e) le

0 3 / 1 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O Q U E T

Prénom (s)

E L I O T T

20 / 20

Ecricome

Épreuve : Mathématiques approfondies

Sujet ☐ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 0 1 / 0 9

Numéro de table

0 1 4

Commencez à composer dès la première page.

Exercice 1:

1. D'après les séries et les intégrales de Riemann,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

2. a) Notons $f: t \mapsto \frac{1}{t^2}$. f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et:
 $\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) = \frac{-2}{t^3}$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $t \in [n-1, n]$, $n \geq 2$ donc $n-1 \in \mathbb{R}_+^*$

$$n-1 \leq t \leq n$$

$$\Rightarrow (n-1)^2 \leq t^2 \leq n^2 \quad (\text{croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{n^2}$$

(cf. $\rightarrow$ étude de f)

Et par croissance de l'intégrale sur les fonctions continues et où

 $n > n-1$, on a:

$$\int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2} \geq \int_{n-1}^n \frac{dt}{n^2}$$

$$Q_n \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n^2} (n - (n-1)) = \frac{1}{n^2}$$

Pour $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2} \geq \frac{1}{n^2}$

D'autre part: soit $t \in [n, n+1]$,

$$n \leq t \leq n+1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{t^2} \quad (\text{idem})$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^2} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \quad (\text{encore car on a de l'infériorité de l'intégrande})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} (n+1 - n) \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2}$$

Ainsi, par transitivité de l'inégalité:

$$\forall n \geq 2, \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2}$$

2.b. Soit $\tilde{N} > N$: en sommant la dernière inégalité de $N+1$ à $\tilde{N}$, il

$$\text{vient: } \sum_{n=N+1}^{\tilde{N}} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\tilde{N}} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\tilde{N}} \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2}$$

On :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ d'où on a:}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\tilde{N}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq \sum_{n=N+1}^{\tilde{N}} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{\tilde{N}} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N+1} - \frac{1}{\tilde{N}+1} \leq \sum_{n=N+1}^{\tilde{N}} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N+1-1} - \frac{1}{\tilde{N}} \quad (\text{armées télescopiques})$$

Et pour $\tilde{N} \rightarrow +\infty$ (licite d'après q1):

comme $\frac{1}{\tilde{N}+1} \xrightarrow{\tilde{N} \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{\tilde{N}} \xrightarrow{\tilde{N} \rightarrow +\infty} 0$, on a bien:

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1}{N}$$

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$|S_N - S| \leq 10^{-3} \Leftrightarrow \underbrace{-10^{-3} \leq S_N - S \leq 10^{-3}}$$

Cela n'est pas utile, on procède autrement:
Remarquons que:

$$|S_N - S| = R_N \quad (\text{Par Charles sur les séries}).$$

Or $R_N \leq \frac{1}{N}$ donc pour $N = 1000$, on a:

$$|S_N - S| \leq 10^{-3}$$

Et par décroissance de $N \rightarrow \frac{1}{N}$, cette inégalité reste vraie pour N entiers supérieurs. On peut donc:

$$\underline{N_0 = 1000}$$

4. a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

$$|T_N - S| = \left| S_N - S + \frac{1}{N+1} \right|$$

$$= |$$

On admet.

4.b) On aait $N_0 = 1000$.

$$\text{Posons } N_1 = 32 \text{ car } (N_1)^2 = 1024 > 1000$$

D'où l'inégalité en 4.a admise:

On peut poser $N_1 = 32$

5.a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$,

$$n(n+1) \dots (n+p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{p+1} \text{ (équivalent polynôme)}$$

$$\Rightarrow U_n(p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}}$$

$$\text{D'où } \forall p \in \mathbb{N}^*, U_n(p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}}$$

5.b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, donc $p+1 > 2 > 1$ donc d'après la question 1,

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{p+1}} \text{ converge (série de Riemann) et d'après que } \forall n \geq 1, \frac{1}{n^{p+1}} > 0$$

Donc par critère d'équivalence sur les séries de fonctions positives,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \geq 1} U_n(p) \text{ converge bien.}$$

6.a) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que:

$$U_n(1) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1) + b n}{n(n+1)}$$

$$\Leftrightarrow (\text{Vérifier les deux})$$

Numéro d'inscription

5 0 3 1 5 8



Né(e) le

0 3 / 1 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O Q U E T

Prénom (s)

E L i o T T

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 2

/ 0 9

Numéro de table

0 1 4

Commencez à composer dès la première page...

$$1 = (a+b)n + a \quad (\text{par identification})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Donc on pose $a = 1$ et $b = -1$

$$6.b) \quad U(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{existe d'après 5.a})$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (\text{cf. 6.a})$$

$$= \frac{1}{1} - \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1}$$

$$= 1$$

Donc $U(1) = 1$

7.a) Soit $n \geq 1, p \geq 2$

$$\begin{aligned}
 & U_n(p-1) - U_{n+1}(p-1) \\
 &= \frac{1}{n \times \dots \times (n+p-1)} - \frac{1}{(n+1) \times \dots \times (n+p)} \\
 &= \frac{(n+p) - n}{n \times \dots \times (n+p)} \\
 &= p \times U_n(p)
 \end{aligned}$$

Donc $\forall n \geq 1, \forall p \geq 2, U_n(p-1) - U_{n+1}(p-1) = p U_n(p)$

7.b. Soit $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 U(p) &= \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(p-1) - U_{n+1}(p-1) \quad (\text{cf. 7.a \& Linéarité de la somme}) \\
 &= \frac{1}{p} (U_1(p-1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1}(p-1)) \\
 &= \frac{1}{p} \left(\frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times (p-1) \times p} \right) \quad (\text{cf. équiv. fournie en 5.9 pour calculer la limite de } U_{n+1}(p-1)) \\
 &= \frac{1}{p} \times \frac{1}{p!}
 \end{aligned}$$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, U(p) = \frac{1}{p p!}$

8.a. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{O}_p : \frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2 \times \dots \times (n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! U_n(k)$ "est vraie"

$$\boxed{\text{I}} \quad \frac{1!}{n^2(n+1)} + 0! U_n(1)$$

$$= \frac{1}{n^2(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{n^2(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n^2} \quad \rightarrow \text{Donc } \mathcal{O}_1 \text{ est vrai}$$

$\boxed{\text{II}}$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{O}_p$ vraie et démontrons $\mathcal{O}_{p+1}$:

Par hypothèse de récurrence :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2 \times \dots \times (n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! U_n(k)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{p!}{n^2 \times \dots \times (n+p)} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} (U_n(k-1) - U_{n+1}(k-1)) (k-1)!$$

$$= \frac{p!}{n^2 \times \dots \times (n+p)} + \sum$$

$\mathcal{Q}_n$ admet

8) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, xmas la dernière égalité pour n allant de 1 à N :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^N \frac{p!}{n^2 \times \dots \times (n+p)} + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^p (k-1)! U_n(k) \quad (\text{Linéarité de la somme})$$

$$= p! \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2 \times \dots \times (n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! \sum_{n=1}^N U_n(k) \quad (\text{Idem})$$

Et par $N \rightarrow +\infty$ ce qui est bien licite car les séries convergent d'où les questions précédentes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \times \dots \times (n+p)} + \sum_{k=1}^p (k-1)! \times \underbrace{\frac{1}{k} \times \frac{1}{k!}}_{= \frac{1}{k \times k} = \frac{1}{k^2}} \quad (p=1, 7, 6)$$

Ainsi, $S = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} + p! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \times \dots \times (n+p)}$

9. De la même manière qu'en 92, on montre rapidement que:
 $x \mapsto \frac{1}{x^{p+2}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, 92 donne: $\forall m \geq 2$,

$$\int_m^{m+1} \frac{dt}{t^{p+2}} \leq \frac{1}{x^{p+2}}$$

On admet.

10. Admis.

11. On remarque assez logiquement que l'écartate U_n , T_n et S_n avec S tend (semble en tout cas) vers 0 par $n \rightarrow +\infty$.

Numéro d'inscription

5 0 3 1 5 8



Né(e) le

0 3 / 1 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O Q U E T

Prénom (s)

E L I O T T

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques supérieures

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 3 / 0 9

Numéro de table

0 1 9

Commencez à composer dès la première page...

Min surtout, il semble que au fil de l'énamé, on ait obtenu des meilleurs valeurs approchées de J car la courbe de $|U_n - S|$ est au dessus (écart plus grand) que celle de $|T_n - S|$ et que celle de $|V_n - S|$

L'énamé a permis de regrouper des approximations de plus en plus précises de J .

EXERCICE 2 :

I

1.a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (P, Q) \in (P_n(\mathbb{R}))^2$

$$\phi(\lambda P + Q)(x) = (\lambda P + Q)(x_0), \dots, (\lambda P + Q)(x_m)$$

(L'écrit de l'annexion $\rightarrow$ = $\lambda (P(x_0), \dots, P(x_m)) + (Q(x_0), \dots, Q(x_m))$
de polynômes à des = $\lambda \phi(P)(x) + \phi(Q)(x)$
réels)

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in (P_n(\mathbb{R}))^2, \phi(\lambda P + Q) = \lambda \phi(P) + \phi(Q)$.

Donc Φ est linéaire.
 Soit $P \in \text{Ker}(\Phi)$,

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \forall i \in [0, n], P(x_i) = 0 \\ &\Rightarrow P \text{ s'annule } (n+1)\text{-fois} \\ &\Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad (\text{car } \deg(P) \leq n)\end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$.
 Donc Φ est injective.

Ainsi, Φ est une application linéaire injective.

$$2. \dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$$

Et comme Φ est injective, cela suffit à affirmer que:

Φ est bijective.

Donc pour tout élément de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que $(P(x_0), \dots, P(x_n)) = (y_0, \dots, y_n)$.

Ainsi, pour tout $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\exists! P \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\underline{\underline{\forall i \in [0, n], P(x_i) = y_i}}$$

2. En application de q^1 , posons $(g_0, \dots, g_{n-1}) = (0, \dots, 0, \underset{\vdots}{1}, 0, \dots, 0)$

D'après q^1 :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists ! L_i \in \mathcal{R}_n[x], \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

3. Admis

4. D'après la question 2, on sait que L_i est de la forme:

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(x) = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j), \lambda \in \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car par une question de degré} \\ \deg \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right) = n \text{ et } \deg(L_i) \leq n \end{array} \right)$$

On en évalue en $x = x_i$ (toujours d'après q^2):

$$L_i(x_i) = \lambda \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} = \lambda \quad \rightarrow \text{(cf } q^2 \text{ et la dérivée ne s'annule pas)}$$

On conclut ainsi $\lambda = 1$. Donc:

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\deg(L_i) = \deg \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \right) = n+1-1 = n$$

Donc $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(L_i) = n$

On admet un coefficient dominant.

5. * Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P, \tilde{P}, Q) \in (R_n \setminus \{0\})^3$

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + \tilde{P}, Q \rangle &= \sum_{k=0}^n (\lambda P(x_k) + \tilde{P}(x_k)) Q(x_k) \\&= \sum_{k=0}^n [\lambda P(x_k) + \tilde{P}(x_k)] Q(x_k) \quad (\text{cf. 1. a}) \\&= \lambda \sum_{k=0}^n P(x_k) Q(x_k) + \sum_{k=0}^n \tilde{P}(x_k) Q(x_k) \quad (\text{linéarité de la somme}) \\&= \lambda \langle P, Q \rangle + \langle \tilde{P}, Q \rangle\end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

* La commutativité du produit de deux réels assure directement que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique donc d'après le 1^{er} point que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

$$* \langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n P^2(x_k)$$

Sous cette forme, il apparaît que $\langle P, P \rangle \geq 0$ comme somme de réels positifs:

$$* \langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{0, \dots, n\}, P^2(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \{0, \dots, n\}, P(x_k) = 0$$

$\Rightarrow P$ s'annule $n+1$ fois (état de degré n)

Numéro d'inscription

5 0 3 1 5 8



Né(e) le

0 3 / 1 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O Q U E T

Prénom (s)

E L I O T T

20 / 20

ecricome

Épreuve :

Matématiques approfondies

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

0

4

/

☐

0

9

Numéro de table

☐

0

1

9

Commencez à composer dès la première page.

$$\Rightarrow P = 0_{R(x)}.$$

Il est clair que réciproquement, $\langle 0_{R(x)}, 0_{R(x)} \rangle = 0$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

6. Soit $(i, j) \in \llbracket 0, m \rrbracket^2$.

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^m L_i(x_k) L_j(x_k)$$

1^{ère} cas : $i = j$

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m (L_i(x_k))^2 + (L_i(x_i))^2$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

(par définition de L_i)

2^{ème} cas : $i \neq j$

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^m L_i(x_k) L_j(x_k) + L_i(x_i) L_j(x_i)$$

$$= 0 + L_i(x_i) \times 0$$

$$= 0$$

$$\text{On } \|L_i\| = \sqrt{\langle L_i, L_i \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

Donc $\mathcal{L}$ est bien une base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

7. D'après ce qui précède, $\exists! (\lambda_0, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$,

$$\forall P \in R_m(\mathbb{X}), \quad P(x) = \sum_{i=0}^m \lambda_i L_i(x)$$

Soit $j \in [0, m]$,

$$P(x_j) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^m \lambda_i L_i(x_j) + \lambda_j L_j(x_j)$$

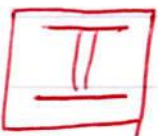
$$= 0 + \lambda_j$$

$$= \lambda_j \quad (\rightarrow \text{et } \forall j \in [0, m])$$

$$\text{Donc } \forall P \in R_m(\mathbb{X}), \quad P(x) = \sum_{i=0}^m P(x_i) L_i(x)$$

Donc les coordonnées de tout $P \in R_m(\mathbb{X})$ dans $\mathcal{L}$ sont:

$$\underline{(P(x_0), \dots, P(x_m))}$$



$$8.a) N_0(x) = 1 \quad (P_j \rightarrow \text{évalué})$$

$$N_1(x) = (x - x_0)$$

$$= x + 1$$

$$N_2(x) = (x+1)(x-1) \\ = x^2 - 1$$

$$N_3(x) = (x+1)(x-1)(x-2) \\ = (x^2 - 1)(x-2) \\ = x^3 - 3x + 2$$

Donc $N_0(x) = 1, N_1(x) = x+1, N_2(x) = x^2 - 1, N_3(x) = x^3 - 3x + 2$

8. & 8. Elles sont interdites sous la question 3, I, on y reviendra à la fin de l'épreuve.

9. $\forall i \in [0, n]$, $\deg(N_i) = i$ (le cas $i=0$ revient bien à cette définition)

Donc N est constituée de $n+1$ polynômes non-nuls de degré 2 à 2 distincts ou tous appartenant à $R_n[x]$ donc

N est libre. Et comme $\text{card}(N) = n+1 = \dim(R_n[x])$:

N est bien une base de $R_n[x]$.

10.(a) Montrons que $\sum_{k=0}^n L_k(x) = 1$:

(L) est une base de $R_n[x]$ donc:

$$\exists! (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in R^{n+1}, N_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x)$$

En évaluant cette relation en $x = x_j, j \in [0, n]$:

$$N_0(x_j) = \alpha_j L_j(x_j)$$

$$\Rightarrow 1 = \alpha_j$$

Donc $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\alpha_j = 0$

Ainsi, on a bien : $N_0(x) = \sum_{i=0}^m L_i(x)$

10.6. Montrons par récurrence que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la proposition

Δ_i : " $N_i = \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k$ " est vraie

[I] Pour $i=0$: $N_0 = 1$

$$\sum_{k=0}^n 1 L_k = \sum_{k=0}^n L_k = N_0 \rightarrow 1 \text{ (car } L_0 \rightarrow 1 \text{ et } L_1 \rightarrow 0 \text{, etc.)} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=0}^n} \right\} \text{ Donc } \Delta_0 \text{ vraie}$$

[H] Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, supposons Δ_i vraie et démontrons Δ_{i+1} :

$$N_i = \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k$$

$$\Rightarrow N_{i+1} = (x - x_i) \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k$$

$$= \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^i (x_k - x_j) L_k \quad (\text{Linéarité de la somme})$$

$$\text{Or si } k=i : \prod_{j=0}^i (x_i - x_j) L_k = 0 \text{ car on commence à}$$

sommer à $k=i+1$.

Donc $\Delta_i \Rightarrow \Delta_{i+1}$

D'où par le principe de récurrence : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $N_i = \sum_{k=i}^n \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k$

Numéro d'inscription

5 0 3 1 5 8



Né(e) le

0 3 / 1 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O R U E T

Prénom (s)

E L I O T T

20 / 20

Ecricone

Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

0 5

/

☐

0 9

Numéro de table

☐

0 1 9

Commencez à composer dès la première page.

$$11. P_{\infty, N} = A = \left(\sum_{k=i}^n \sum_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) \right)_{i,j} \quad (P_{\infty, N} \text{ est la matrice})$$

Pour $n \geq 1$, $N_0 = 1$ et $N_1 = x + 1$,

$$\begin{aligned} \langle N_0, N_0 \rangle &= \langle 1, 1 \rangle \\ &= \sum_{j=0}^n 1^2 \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

Donc N_n n'est pas orthogonale par le produit scalaire.

12. On a démontré au 99 que N est une base de $R_n[x]$. Par définition d'une base et puisque $P \in R_n[x]$, on a bien :

$$\forall P \in R_n[x], \exists (a_0, \dots, a_n) \in R^{n+1}, P(x) = \sum_{i=0}^n a_i N_i(x)$$

13. (Voir doc)

```
import numpy as np
```

```
def prod(X, i, k):
```

```
    S = 1
```

```
    for v in range(0, i):
```

```
        S = S * X[v, 0]
```

```
    for v in range(i+1, k):
```

```
        S = S * X[v, 0]
```

```
    return S
```

```
b. import numpy as np
```

```
def coeff(X, Y):
```

```
    S = 0
```

```
    for i in range(0, k+1):
```

```
        S = S + (Y[i, 0]) * (1 / prod(X, i, k)) # 9.13.a
```

```
    return S
```

c. On admet.

$$14.a) a_0 = y_0 / \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^0 (x_i - x_j)$$

$$= \frac{y_0}{1}$$

$$= y_0$$

Donc $a_0 = y_0$

De plus, on a déjà montré que $\deg(N_m) = n$ ($\forall m \in \mathbb{N}$)

$$\text{On } P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k N_k$$

Donc le coefficient du monôme de plus haut degré de P_n est celui de N_n multiplié à a_n .

$$\text{On } N_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Dès lors, N_i est unitaire donc le coefficient devant x^n de P_n est $1 \times a_n = a_n$.

Ainsi, le coefficient du monôme de plus haut degré de P_n est a_n .

$$14.b. \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i N_i(x)$$

$$= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{\gamma_j}{\prod (x_i - x_j)} N_i(x) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^n \left[\sum_{\substack{\tilde{j}=0 \\ \tilde{j} \leq i \\ \tilde{j} \neq i}}^i \frac{\gamma_{\tilde{j}}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\tilde{j}-1} (x_{\tilde{j}} - x_j)} \times \left(\sum_{h=i}^n \prod_{j=0}^{\tilde{j}-1} (x_h - x_j) L_h \right) \right] (\gamma_{\tilde{j}-1} \gamma_{\tilde{j}+1,0})$$

$$= \sum_{i=0}^n \gamma_i L$$

On admet.

14.c) Depuis 14.a, a_n est le coefficient dominant de P_n .

On $\forall i \in [0, n]$, $\deg(L_i) = n$ donc d'après 14.b, a_n est la somme des y_i multipliés par les coefficients dominants de L_i .

On en a démontré en I que le coefficient dominant de L_i est:

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_j)}.$$

Ainsi, on a bien:

$$a_n = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_j)}$$

15.a) On sait que $\deg(N_j) = j$ ($\forall j \in [0, h]$).

Donc $\forall j \in [0, h]$, $\deg(a_j N_j) \leq j \leq h$ (si $a_j = 0$, on met bien une inégalité)

Pour somme de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à h , on a bien:

$$\deg(Q_h) \leq h \text{ donc } \underline{Q_h \in \mathbb{R}_h[X]}.$$

15.b) Soit $i \in [1, h]$,

$$Q_h(x_i) = \sum_{j=0}^h a_j N_j(x_i)$$

On admet

15.c) D'après le début d'énoncé on a 11 et la question précédente, P_h et Q_h coïncident sur les points $x_1, \dots, x_h$ donc d'après la

Numéro d'inscription

9 0 3 1 5 8



Né(e) le

0 3 / 1 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O Q U E T

Prénom (s)

E L I O T T

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 6

/ 0 9

Numéro de table

0 1 9

Propriété admise au début de l'énoncé, $\forall x \in \mathbb{R}, P_2(x) = Q_2(x)$.

$$\text{Donc } P_k(x) = \sum_{j=0}^k a_j N_j(x)$$

15.1) On admet cette question.

Problème :

I

1. * $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ (car $a > 0$ et on a un quotient de fractions positives où le dénominateur ne s'annule jamais).

* $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ comme quotient de fractions qui le sont et où le dénominateur ne s'annule jamais.

* Soient $(A, B) \in \mathbb{R}^2, A < B$

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) dx &= \frac{a}{\pi} \int_A^B \frac{1}{a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} dx && \text{(Linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_A^B \frac{1}{a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_A^B$$

On $\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2}$

Donc : $\arctan\left(\frac{B}{a}\right) \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$ et $\arctan\left(\frac{A}{a}\right) \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2} \text{ (a>0)}$

Donc pour $A \rightarrow -\infty$ et $B \rightarrow +\infty$ dans l'intégrale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \times \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$= 1$$

Donc f est une densité de probabilité.

2. Soit $B < 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_B^x f(t) dt$$

$$= \left[\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) \right]_B^x$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{B}{a}\right)$$

On $\arctan\left(\frac{B}{a}\right) \xrightarrow{B \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2}$

Donc $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$

3. X admet une espérance $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ converge absolument.

$$x f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{\pi} \times \frac{1}{x} > 1$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge comme intégrale de Riemann si $1 \leq 1$

Donc par critère d'équivalence sur les intégrales de fonction continue positives,

$$\int_1^{+\infty} |x f(x)| dx \text{ diverge.}$$

Cela suffit à affirmer que X n'admet pas d'espérance.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $X \sim \text{Cauchy}(1)$

$$\begin{aligned} \boxed{\Leftarrow} \quad F_{aX}(x) &= P(aX \leq x) \\ &= P\left(X \leq \frac{x}{a}\right) \quad (a > 0) \\ &= F_X\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \quad (\text{car } X \text{ suit une loi de Cauchy de paramètre } 1) \end{aligned}$$

On a bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre a .

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $aX \sim C(a)$ (on notent C les lois de Cauchy)

$$\begin{aligned} F_{aX}(x) &= P(aX \leq x) \\ &= P\left(X \leq \frac{x}{a}\right) \quad (a > 0) \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \\ &= F_{\tilde{X}}(x) \quad \text{où } \tilde{X} \sim C(1). \end{aligned}$$

Donc X suit une loi de Cauchy standard si et seulement si αX suit une loi de Cauchy de paramètre α .

5.a) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = \frac{\alpha t + \beta}{t^2 + b^2} + \frac{\alpha(x-t) + \gamma}{(x-t)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{(\alpha t + \beta)[(x-t)^2 + 1] + [\alpha(x-t) + \gamma](t^2 + b^2)}{(t^2 + b^2)((x-t)^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 1 = (\alpha t + \beta)(x^2 - 2xt + t^2 + 1) + (\alpha x - \alpha t + \gamma)(t^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 1 = t^2(-2\alpha x + \alpha x + \gamma + \beta) + t(\alpha x^2 + \alpha - 2x\beta - \alpha b^2) + (\beta x^2 + \beta + \alpha x b^2 + \gamma b^2)$$

Puis par identification :

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha x + \alpha x + \gamma + \beta = 0 \\ \alpha x^2 + \alpha - \alpha b^2 - 2x\beta = 0 \\ \beta x^2 + \beta + \alpha x b^2 + \gamma b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \beta + \gamma = \alpha x \\ \alpha(x^2 + 1 - b^2) = 2\beta x \\ \beta(x^2 + 1) + \alpha x b^2 + \gamma b^2 = 1 \end{cases}$$

5.b. La première ligne donne que : $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{x}$ (car $x \neq 0$)
donc les deuxième et troisième ligne donnent :

Numéro d'inscription

5 0 3 1 5 8



Né(e) le

0 3 / 1 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O Q U E T

Prénom (s)

E L I O T T

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques approfondies

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 7

/ 0 9

Numéro de table

0 1 4

Commencez à composer dès la première page.

$$\begin{cases} \frac{B+y}{x} (x^2 + 1 - b^2) = 2Bx \\ B(x^2 + 1) + (B+y)b^2 + yb^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(x^2 + b^2 + 1) + y(b^2) \end{cases}$$

Q admet.

$$\begin{cases} B(x^2 + b^2 + 1) + 2yb^2 = 1 & \text{Pind} \\ 2B + y(x^2 + b^2 + 1) = 1 & \text{L}_2: -(x^2 + b^2 + 1)L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(x^2 + b^2 + 1) + 2yb^2 = 1 \end{cases}$$

Q admet.

b.a. $X \sim C(h)$ et $Y \sim C(1)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{a}{\pi} \times \frac{-2x}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 0 \\ \Rightarrow x \leq 0$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$f(0) = \frac{a}{\pi a^2} = \frac{1}{\pi a}$$

$$\text{et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc le produit de convolution $x \mapsto f(x)$ est bien défini.

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{C}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t) f_y(x-t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\pi^2} \times \left(\frac{1}{t^2 + h^2} \right) \times \frac{1}{(x-t)^2 + 1^2} dt$$

$$= \frac{h}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \quad (\text{cf p. 5})$$

$$= \frac{h}{\pi^2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) \right) \quad (G \text{ est une primitive de } G')$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{C}(x) = \frac{h}{\pi^2} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) - \lim_{t \rightarrow -\infty} G(t) \right)$$

$$6.b. \quad \frac{t^2 + b^2}{(x-t)^2 + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

On a $\ln(t) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ par continuité en 1 du logarithme

Donc par comparaison des limites, $\frac{\alpha}{2} \ln\left(\frac{t^2 + b^2}{(x-t)^2 + 1}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Comme } b > 0, \quad \begin{cases} \frac{\beta}{b} \arctan\left(\frac{t}{b}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{b} \times \frac{\pi}{2} \\ \gamma \arctan(t-x) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \gamma \times \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underline{G(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta}{b} + \gamma\right)}$$

En $-\infty$, l'équivalent polynôme reste le même donc le logarithme en question tend toujours vers 0 pour $t \rightarrow -\infty$.

$$\begin{cases} \frac{\beta}{b} \arctan\left(\frac{t}{b}\right) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{\beta}{b} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \gamma \arctan(t-x) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -\gamma \times \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}(x) &= \frac{b}{\pi^2} \times \frac{\pi}{2} \left(\frac{\beta}{b} + \gamma + \frac{\beta}{b} + \gamma \right) \\ &= \frac{b}{\pi^2} \left(\frac{\beta}{b} + \gamma \right) \\ &= \beta + b\gamma \\ &= \frac{b+1}{x^2 + (b+1)^2} \quad (\text{cf. 5.c}) \end{aligned}$$

On reconnaît une fonction densité de loi de Cauchy de paramètre $b+1$. On a bien $b+1 > 0$

Donc : $X+Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $b+1$.

7. Montrons par récurrence que $\forall h \in \mathbb{N}$, la proposition Ψ_h :
 $\sum_{i=1}^h x_i \rightarrow C(ha)$ "est vraie".

[I] x_1 est un réel mètre au li de l'angle de paramètre a .

Or $1 \times a = a$ donc $x_1 \rightarrow C(1a)$

Ψ_1 est donc vraie.

[H] Soit $h \in \mathbb{N}$, supposons Ψ_h vraie et démontrons Ψ_{h+1} .
 Soit $\tilde{x} = \sum_{i=1}^h x_i$.

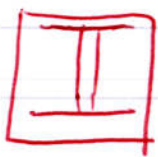
Donc $\tilde{x} + x_{h+1} \rightarrow C(ha + a)$ d'après la question précédente

Donc $\sum_{i=1}^{h+1} x_i \rightarrow C((h+1)a)$ (Le lemme des conditions assure que $\tilde{x}$ et x_{h+1} sont indépendantes, ce qui permet d'appliquer 96)

Donc $\Psi_h \Rightarrow \Psi_{h+1}$.

D'après le principe de récurrence,

$$\underline{\underline{\forall h \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^h x_i \rightarrow C(ha)}}$$



8. $F_0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\pi(0 - \frac{1}{2}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\chi(x) = \mathbb{R}$ (par définition de $x \rightarrow \tan(x)$)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_x(x) = P(\tan(\pi(0 - \frac{1}{2})) \leq \frac{x}{a})$

$= P(\pi(0 - \frac{1}{2}) \leq \arctan(\frac{x}{a}))$

(Car $x \rightarrow \tan(x)$ est strictement croissante bijective, de bijection

Numéro d'inscription

5 0 3 1 5 8



Né(e) le

0 3 / 7 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O Q U E T

Prénom (s)

E L I O T T

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☐

1

ou

☐

2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

☐

8

/

☐

9

Numéro de table

☐

1

4

Complétez à composer la première page.

reciproque l'octangente.

$$\text{Donc } F_X(x) = P\left(U \leq \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, -\frac{\pi}{2} \leq \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = F_U\left(\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}$$

Donc $Y \rightarrow (Ca)$

9. import numpy as np

~~import random as rd~~ import numpy.random as rd

def cauchy(a):

return a * np.tan(np.pi * (rd.random - 1/2))

```

10. import numpy.random as rd
import numpy as np
def redistions(n, a):
    U = np.zeros(n)
    for k in range(0, n):
        U[k] = Cauchy(a)
    return U

```

```

11. import numpy as np
import numpy.random as rd
def moyennes(n, a):
    U = redistions(n, a)
    V = np.zeros(n)
    for k in range(0, n):
        V[k] = (np.sum(U, [0:k]))/k
    return V

```

12. Les trois graphiques semblent avoir un comportement chaotique car on ne peut détecter de grandes ressemblances entre les 3 graphiques.

Cela peut se comprendre à l'aide de la question I,3 où l'on a montré que X_n admet pas d'ergodicité.

III

13. $Y_n(\omega) = \{0, 1\}$ donc Y_n suit une loi de Bernoulli.

$$\begin{aligned} P(Y_n = 1) &= P(|X| \leq M) \\ &= P(-M \leq X_n \leq M) \\ &= F(M) - F(-M) = 1 \end{aligned}$$

Mais l'impairité de l'arctangente sur $\mathbb{R}$ assure donc que :

$$\underline{Y_n \rightarrow B(2F(M)-1)}$$

$$\text{Donc } \underline{Y_n \rightarrow B\left(\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{a}\right)\right)} \quad (\text{par définition de } F)$$

14. Les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes, admettant toutes la même espérance (car d'après 13, Y_n suit une loi de Bernoulli d'un paramètre indépendant de n) et toutes une variance.

D'après la loi faible des grands nombres :

$$\underline{\underline{\bar{Y}_n \xrightarrow{P} E(Y_n) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{a}\right)}}$$

K.1. On a : $M > 0$ et $A > 0$ donc :

$$\arctan(0) \leq \arctan\left(\frac{M}{a}\right) \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{croissance de l'arctangente sur } \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} \times 0 \leq \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{M}{a}\right) \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{0 \leq p(a) \leq 1}}$$

$$\text{Soit } \alpha \in [0, 1]$$

$$-(\alpha - \frac{1}{2})^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow -(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4}) \leq 0$$

$$\Rightarrow -\alpha(\alpha - 1) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha(1 - \alpha) \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Par } \alpha = p(a), \text{ on a bien : } \underline{p(a)(1 - p(a)) \leq \frac{1}{4}}$$

$$15.2) \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Par définition d'une fonction de répartition d'une variable à densité, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y$.

Comme $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} > 0$, la valeur de l'intégrale est positive :

$$\int_y^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt > 0$$

$$\Rightarrow \Phi(x) > \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{On déf.})$$

$$\Rightarrow \Phi(x) > \Phi(y).$$

Donc Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\Phi(\mathbb{R}) =]0, 1[$ (fonction de répartition)

$$\text{Q. } 0,975 \in]0, 1[.$$

$$\text{Donc } \exists ! z \in \mathbb{R}, \Phi(z) = 0,975.$$

Numéro d'inscription

5 0 3 7 5 8



Né(e) le

0 3 / 1 1 / 2 0 0 5

Signature

Nom

F L O Q U E T

Prénom (s)

E L I O T T

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques générales

Sujet

☐ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

0 9 /

0 9

Numéro de table

0 1 9

Commencez à composer dès la première page.

On $\phi(1) = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < 0,975$ qui assure par continuité de ϕ que $\exists z \in \mathbb{R}_+$.

Ainsi, $\exists ! z \in \mathbb{R}_+, \phi(z) = 0,975$.

15. D'après le théorème central limite,

On admet.

15.1. On admet.

16. Plus n est grand plus l'écart (représenté par les courbes de bornes supérieures et inférieures) semble se rapprocher de la valeur a que l'on cherche à estimer (ici $a=1$).

On a donc bien (semble-t-il), un intervalle de confiance asymptotique de a .

17. On attend de cette intervalle de confiance que l'écart des valeurs se rapproche de plus en plus de 0 pour des grandes valeurs de

n et le plus rapidement possible. Parmi les graphiques, on choisit donc celui dont la courbe est inférieure à toutes les autres. (de sorte que "le lien tende le plus rapidement possible vers 0").

Graphiquement, on privilégiera donc $\frac{M}{a} = 1 \Leftrightarrow M = a$.

Retour aux questions laissées précédemment :

Exercice 2 : question 3 et 4 :

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$, remarquons que le polynôme :

$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$ est unitaire c'est-à-dire que le coefficient devant x^n est 1 ($n \neq i$) et celui de x^{n-1} est -1 (car on a $i = n$)

Ainsi, par produit, le coefficient dominant de $L_i(x)$ est :

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}.$$

question 3 du même exercice :

D'après la question 2, on a:

$$L_0 = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^m (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^m (x_i - x_j)}$$

$$\text{Donc } L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)} = \frac{-(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

En procédant de même pour L_1, L_2 et L_3 :

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{2(1-2)(1-3)} = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-1)(2-3)} = \frac{(x-1)(x+1)(x-3)}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-1)(3-2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{8}$$

II. question 3. b.

