

ECRICOME PREPA 2024

Mathématiques appliqués

501568

ESTADIEU

ANTOINE

23/07/2004

Note de délibération : 20 / 20

Numéro d'inscription

501568



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

ESTADIEU

Prénom(s)

ANTOINE

20 / 20



Épreuve :

Mathématiques appliquées

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

01 /

11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page...

Exercice 1.

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeur dans $\mathbb{N}^0$, et pour tout entier naturel k on pose :

$$R_X(k) = P(X > k).$$

Partie 1.

1 - Soit $p \in]0, 1[$, On suppose $X \sim G(p)$.

a - On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

Donc :

$$R_X(k) = P(X > k)$$

$$= 1 - P(X \leq k)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^k P(X=i)$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^k (1-p)^{i-1} p.$$

$$= 1 - p \sum_{i=1}^k (1-p)^{i-1}$$

$$= 1 - p \times \frac{1 - (1-p)^k}{p}.$$

$$= (1-p)^k.$$

D'où : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, R_X(k) = (1-p)^k.} \quad (i)$

et $\boxed{\text{si } k=0: P(X > k) = 1.} \quad (X(0) = \mathbb{N}^*).$

Donc la formule (i) est valable pour tout entier naturel k .

(b) - On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, R_X(k) = (1-p)^k.$$

D'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^{k-1}} = 1-p}$$

2 - Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeur dans $\mathbb{N}^*$.

(a) On a avec $k \in \mathbb{N}^*$ -

$$(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k).$$

Donc :

$$\begin{aligned}P(X > n-1) &= P(X = n \cup X > n) \\&= P(X = n) + P(X > n) \\&\text{par incompatibilité.}\end{aligned}$$

Suit

$$P(X > n-1) - P(X > n) = P(X = n).$$

Conclusion :

$$\underline{R_X(n-1) - R_X(n) = P(X=n)}.$$

(b) On a X et Y qui suivent la même loi si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = P(Y=n).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = P(Y=n)$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, R_X(n-1) - R_X(n) = R_Y(n-1) - R_Y(n)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, R_X(n) = R_Y(n)}$$

$$\text{Si } \underline{n=0} \quad P(X=0) = P(Y=0)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) = 1 - P(Y=0)$$

$$\Leftrightarrow R_X(0) = R_Y(0).$$

D'où.

$$\forall n \in \mathbb{N}, X, Y \text{ suivent la même loi si et seulement si } R_X(n) = R_Y(n)$$

Partie II

3. (e) Avec $a = 1$ et $b = 1$.

On a :

$$\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - n!}{n! \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{(n+1-1)n!}{n! \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{n}{(n+1)!}$$

D'où avec $a = 1$, $b = 1$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}}$$

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{n=1}^N \frac{n}{(n+1)!} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{(n)!} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} - \left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n!} + 1 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{(N+1)!} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

Numéro d'inscription

501568



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

ESTADIEU

Prénom(s)

ANTOINE

20 / 20

Ecricome

Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

02 / 11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page...

Donc la série de terme général $\frac{n}{(n+1)!}$

est convergence

et $\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1 \right]$

4 - Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}^*$ telle que -

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X=n) = \frac{n}{(n+1)!}$$

(a) On a :

$X+1$ admet une espérance si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} (n+1) P(X=n) \text{ converge absolument}$$

(Par transfert).

si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} (n+1) \times \frac{n}{(n+1)!}$$

converge (série de termes positifs).

si et seulement si

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n!} (=) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$$

converge.

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Or on reconnaît à un facteur près au dénominateur une série exponentielle de paramètre 1 qui converge.

Donc : $X+1$ admet une espérance.

De plus :

$$\begin{aligned} E(X+1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X+1) = e}$$

Donc par linéarité

$$\boxed{E(X) = e-1}.$$

(b) On a l'équivalence :

$E((X-1)(X+1))$ existe

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} (n-1)(n+1) P(X=n)$ converge absolument (transfert).

$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} (n-1)(n+1) \frac{n}{(n+1)!}$ converge.

$$=, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \text{ converge.}$$

On reconnaît ~~avec~~ de même une série exponentielle de paramètre 1 qui converge.

Donc : $E((X-1)(X+1))$ existe.

et :

$$\begin{aligned} E((X-1)(X+1)) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$\boxed{E((X-1)(X+1)) = e}.$$

Soit :

$$E(X^2 - 1) = e.$$

D'où par linéarité -

$$\boxed{E(X^2) = e + 1}.$$

On a $E(X^2)$ qui existe donc la Variance de X existe et par la formule de Boenig-Huygens

On a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ \boxed{V(X) = 3e - e^2} \end{aligned}$$

Partie III -

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réel compris entre 0 et 1 -

Soit X la durée de vie de l'appareil.

5 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ -

On a :

$$R_X(n) = P(X > n)$$

or : $X > n$ signifie ici que l'appareil a déjà fonctionné $n-1$ année et on veut qu'il fonctionne encore ~~une~~ après l'année n .
notons A ce dernier événement.

On a aussi : $(X > n) = A \cap (X > n-1)$.

D'où :

$$\begin{aligned} R_X(n) &= P(A \cap (X > n-1)) \\ &= P(A) \times P(X > n-1) \text{ car l'état de l'appareil est } \\ &\quad \text{indépendant des états précédents.} \end{aligned}$$

D'où avec les données de l'énoncé :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, R_X(n) = (1 - \alpha_n) R_X(n-1)}$$

Numéro d'inscription

S G I S 6 8



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

E S T A D I E U

Prénom (s)

A N T O I N E

20 / 20

ecricome

Épreuve : Mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

03 / 11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page...

6 - Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$R_x(n) = (1 - \alpha_n) R_x(n-1)$$

Donc puisque $R_x(n-1) > 0$,

$$\frac{R_x(n)}{R_x(n-1)} = (1 - \alpha_n).$$

On a :

$$\prod_{i=1}^n \frac{R_x(i)}{R_x(i-1)} = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i)$$

$$\Rightarrow R_x(n) = \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i) \times R_x(0).$$

or : $R_x(0) = P(X > 0) = 1$ (Une durée de vie ne peut être nulle)

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

D'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^r, R_X(n) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)}$$

7 - On a avec 2 - a - $\forall k \in \mathbb{N}^r$

$$P(X=n) = R_X(k-1) - R_X(n)$$

$$\boxed{P(X=n) = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \alpha_i) - \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i)}$$

ou encore, $\forall k \in \mathbb{N}^r$.

$$\boxed{P(X=n) = \left[\prod_{i=1}^{n-1} (1 - \alpha_i) \right] \times \alpha_n}$$

8 - (a) $\forall k \in \mathbb{N}^r, \alpha_n = p$.

On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}^r$

$$P(X=n) = (1-p)^{n-1} p.$$

De plus $X(\sigma) = \mathbb{N}^r$.

D'où: $\boxed{X \hookrightarrow G(p)}$.

(b). $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$.

Donc:

$$\begin{aligned} P(X=n) &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right) \times \frac{n}{n+1} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)} \times \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n!} \times \frac{n}{n+1}$$

$$\boxed{P(X=n) = \frac{n}{(n+1)!}}$$

Avec $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ on a montré en II
que (avec $P(X=n) = \frac{n}{(n+1)!}$) X est

une loi de probabilité.

Partie IV

9 - (a) Select count (id) from ordinateur.

(b) Select count (annee - panne) from ordinateur
where annee - panne = 1

(c) Si X suit une loi géométrique
alors $P(X=1) = p$.

Ainsi avec un grand nombre de
données dans le tableau et en faisant
le quotient des données en 9-(b)
(nombre d'ordinateurs ayant cessé de
fonctionner un an après leur production)
sur le nombre en 9-(a) -

On peut estimer la fréquence d'apparition
de l'événement en 9-(b) -

Soit une valeur approchée de p -

10 -

11 - (a) Cette commande permet d'avoir une
valeur approchée de l'espérance.

et si $X \sim G(p)$: $E(X) = 1/p$.

Il suffit de prendre l'inverse du nombre
obtenu -

Numéro d'inscription

S 0 1 5 6 8



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

ESTADIEU

Prénom(s)

ANTOINE

20 / 20

ecricome

Épreuve : mathématiques appliquées

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

04 /

11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page..

Exercice 2.

Soit $a \in \mathbb{R}$.Soit $I_a(x)$ la fonction définie par :

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t) - t^2} dt.$$

et $J_a(x)$ définie par :

$$J_a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt.$$

Partie 1.

1. (a) On a :

$$t^2 e^{-2at - t^2} = \frac{t^2}{e^{2at} \times e^{t^2}}$$

$$\text{Or : } \frac{t^2}{e^{t^2}} \xrightarrow{+\infty} 0 \text{ par croissance comparée.}$$

$$\text{Donc : } t^2 e^{-2at - t^2} = \frac{t^2}{e^{2at} \times e^{t^2}} \xrightarrow{+\infty} 0 \text{ par quotient}$$

D'où :

$$e^{-2at - t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ as } t \rightarrow +\infty.$$

(b) On a :

$$e^{-2at - t^2} \geq 0$$

Donc par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant)

$$\int_0^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt \geq 0.$$

On a :

$$e^{-2at - t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ as } t \rightarrow +\infty$$

Donc par critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives puisque :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ converge comme intégrale de Riemann de paramètre } \alpha = 2 > 1.$$

On a :

$$\int_1^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt \text{ converge.}$$

De plus : $t \mapsto e^{-2at - t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$
 Comme composée de fonctions continues sur $[0, +\infty[$

Donc: $\int_0^1 e^{-zat-t^2} dt$ converge.

Donc par la relation de Choles:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zat-t^2} dt \text{ converge.}$$

D'où:

$$\boxed{I_a \text{ est convergente}}.$$

2- On a:

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{za(x-t)-t^2} dt.$$

$$= \int_x^{+\infty} e^{2ax - zat - t^2} dt$$

$$= e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-zat-t^2} dt.$$

Avec 1(b) on a déjà la convergence de I_a pour tout x positif.

Soit $x \in \mathbb{R}_-$

On admet que I_a est définie sur $\mathbb{R}_-$.

(On pourrait montrer que en $-\infty$ avec une fonction impaire)

On a donc I_a définie sur $\mathbb{R}$.

Comme intégral d'une fonction continue

| On aurait la convergence)
Car elle converge pour les $x \geq 0$

3. ca) On a :

$$\int_n^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt - \int_{-\infty}^n e^{-2at - t^2} dt$$

On a vu que $a \rightarrow +\infty$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt - \int_{-\infty}^n e^{-2at - t^2} dt$$
$$= 0.$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt = 0}.$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$.

On a

$$a \in \mathbb{R}$$

On a

$$e^{2ax} \in e^{2at}$$

Car $x \mapsto e^x$ est une bijection

Soit

Croissante sur $\mathbb{R}$

$$e^{2a(x-t)} \in \mathbb{R}.$$

$$(e^{2at} \neq 0)$$

En outre

$$e^{2a(x-t)-t^2} \in e^{-t^2}$$

$$(e^{-t^2} > 0).$$

Numéro d'inscription

S O I S 6 8



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

E S T A D I E U

Prénom (s)

A N T O I N E

20 / 20

ecricome

Épreuve : mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

05 / 11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page..

Les fonctions en jeu étant continues sur $[a, +\infty[$, on a en intégrant bornes dans l'ordre croissant entre a et $+\infty$ par croissance de l'intégrale.

$$\left| \int_a^{+\infty} e^{2a(2-t) - t^2} dt \leq \int_a^{+\infty} e^{-t^2} dt \right|, \quad \text{"I}_a(a)$$

(c) On a d'une part.

$I_a(a) \geq 0$ car on intègre une fonction positive.

D'autre part :

$$\int_a^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^a e^{-t^2} dt.$$

Donc : avec $a \rightarrow +\infty$.

$$\text{On a : } \int_a^{+\infty} e^{-t^2} dt \xrightarrow{+\infty} 0.$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

Donc per encadrement on a indépendamment de a -

$$\boxed{\lim_{+\infty} I_a(a) = 0.}$$

Partie II -

4 - On a :

$$y' = 2ay -$$

Donc l'ensemble des solutions
de cette équation homogène
est :

$$\boxed{y = Ce^{2ax}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5 - Soit F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = \int_0^x e^{-2at - t^2} dt.$$

(a) - En notant G_a une primitive
de $t \mapsto -2at - t^2$

On a : $F_a(x) = G_a(x) - G_a(0)$

Donc, puisque G_a est dérivable sur $\mathbb{R}$
comme primitive du fonction continue sur $\mathbb{R}$
 G_a a F_a qui est aussi dérivable,
et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'_a(x) = G'_a(x) - G'_a(0) \\ = e^{-2ax - x^2}$$

(b) On a : avec $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & e^{2ax} (I_a - F_a(x)) \\ &= e^{2ax} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt - \int_0^x e^{-2at - t^2} dt \right) \\ &= e^{2ax} \times \int_x^{+\infty} e^{-2at - t^2} dt \\ &= \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t) - t^2} dt \\ &= I_a(x). \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, I_a(x) = e^{2ax} (I_a - F_a(x))}$$

(c) On a aussi, I_a dérivable comme produit,
composée et somme de fonctions dérivable.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \quad I_a'(x) &= 2ae^{2ax} (I_a - f_a(x)) \\
 &\quad - e^{2ax} \times e^{-2ax - x^2} \\
 &= \underline{2ae^{2ax} (I_a - f_a(x)) - e^{-x^2}}.
 \end{aligned}$$

De plus :

$$I_a(x) = e^{2ax} (I_a - f_a(x)).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \underline{2a I_a(x) - e^{-x^2}} &= 2ae^{2ax} (I_a - f_a(x)) - e^{-x^2} \\
 &= \underline{I_a'(x)}.
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{I_a \text{ est bien solution de (1)}}.$$

6 - Avec la question 4 et la question 5 - c - on a l'ensemble des solutions de (1).

$$\boxed{y = Ce^{2ax} + I_a(x), \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Numéro d'inscription

S 0 1 5 6 8



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

ESTADIEU

Prénom(s)

ANTOINE

20 / 20

Ecricome

Épreuve :

mathématiques appliquées

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

06

/ 11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page...

7 - (a) Si $a > 0$ l'ensemble des solutionstelles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ est

$$y = Ce^{2ax} + I_a(x), \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) Si $a = 0$ l'ensemble est

$$y = I_a(x)$$

Car $I_a \rightarrow 0$ indépendamment de a et
 sinon $C + I_a(x) \xrightarrow{+\infty} +\infty$

(c) Si $a > 0$ l'ensemble est,

$$y = I_a(x)$$

pour les mêmes raisons
 que en 7 - (b).

Partie III -

Soit $X \sim \mathcal{N}(-a, 1/2)$.

8 - (a) Une densité de X a pour expression.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+a)^2}{1/2}}$$

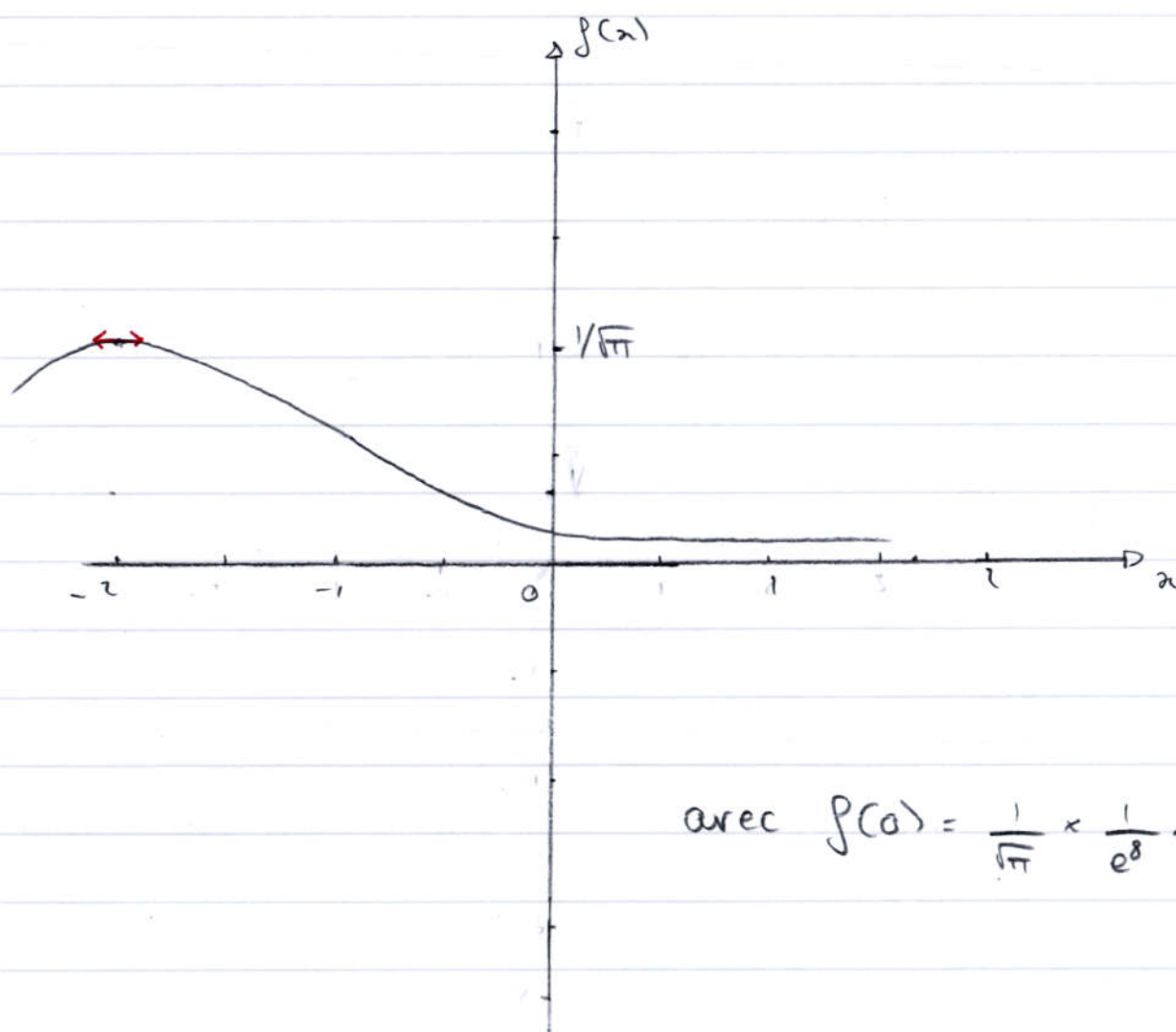
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+a)^2}} \quad .$$

(b) Soit $a = 2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+2)^2} .$$

On a f dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times (-2(x+2)) e^{-(x+2)^2} \\ &= -\frac{2(x+2)}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+2)^2} . \end{aligned}$$



$$\text{avec } f(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{e^8}$$

$$9 - (a) \text{ On a : } \boxed{P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(k+t)^2} dt}$$

$$\begin{aligned} (b) \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} P(X \geq x) &= \int_x^{+\infty} e^{2ax+a^2-(t^2-2at+a^2)} dt \\ &= \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2ax + a^2} P(X \geq x) = I_a(x)}$$

10 - (a) $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Avec $\alpha = 1/2$ et $\beta = -a$.

On a

$$\frac{1}{2}Z - a \hookrightarrow \mathcal{N}(-a, 1/2).$$

Soit :

$$\boxed{\frac{1}{2}Z - a \text{ suit la même loi que } X.}$$

```
10 - (b) | import numpy as np
          | import numpy.random as rd
          | def estim_proba(a, x):
          |     num = 0
          |     for i in range(10000):
          |         Z = rd.normal()
          |         X = -a + Z/2
          |         if X >= x:
          |             num = num + 1
          |     return (num/10000).
```

Numéro d'inscription

S O I S 6 8



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

E S T A D I E U

Prénom (s)

A N T O I N E

20 / 20



Épreuve :

mathématiques appliquées

Sujet



1

ou



2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

07

11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page..

11_ | approx - I(a, x)

return np.sqrt(np.pi) * np.exp(2*a*x + a*(2)) *

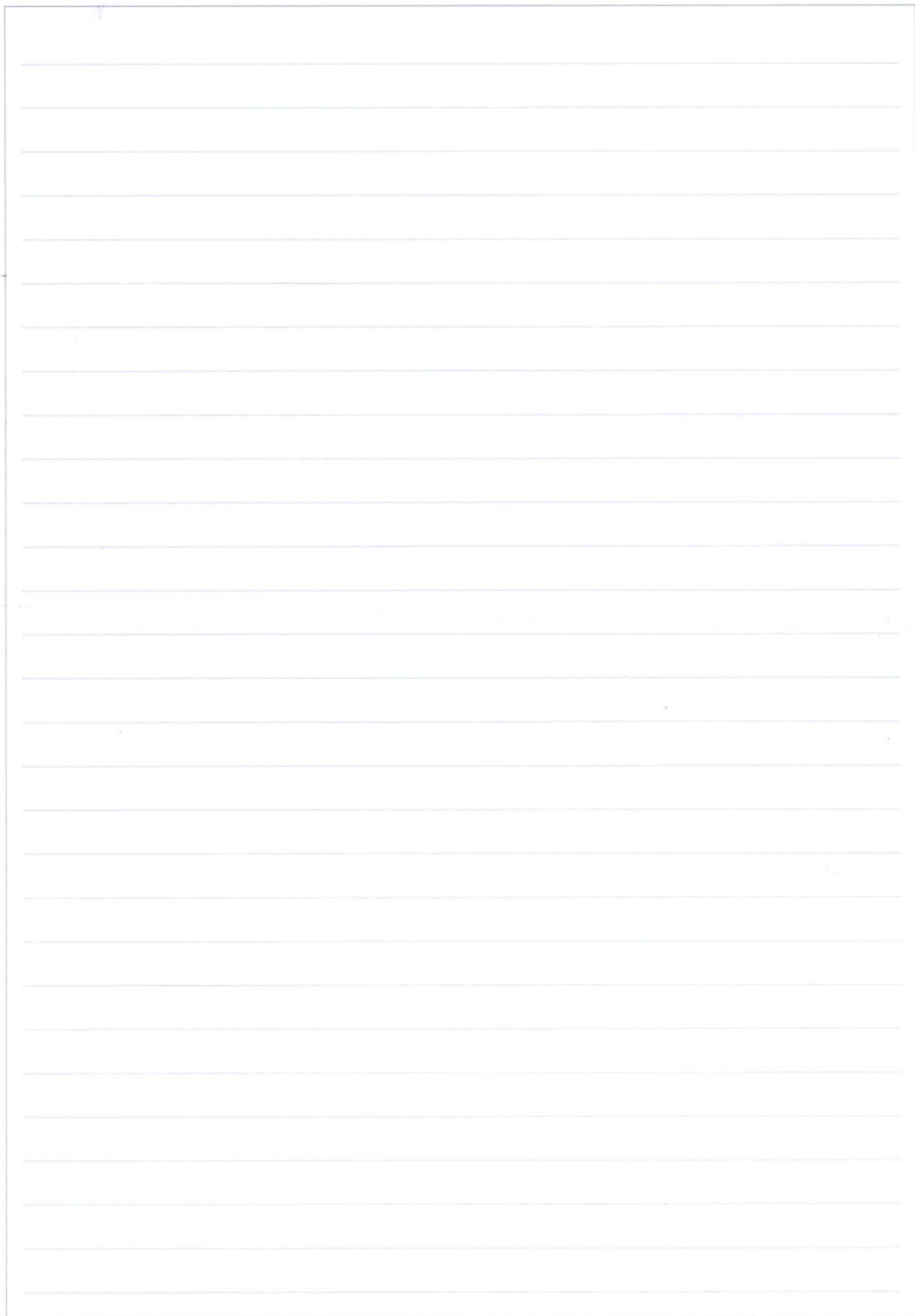
estim - proba(a, x)

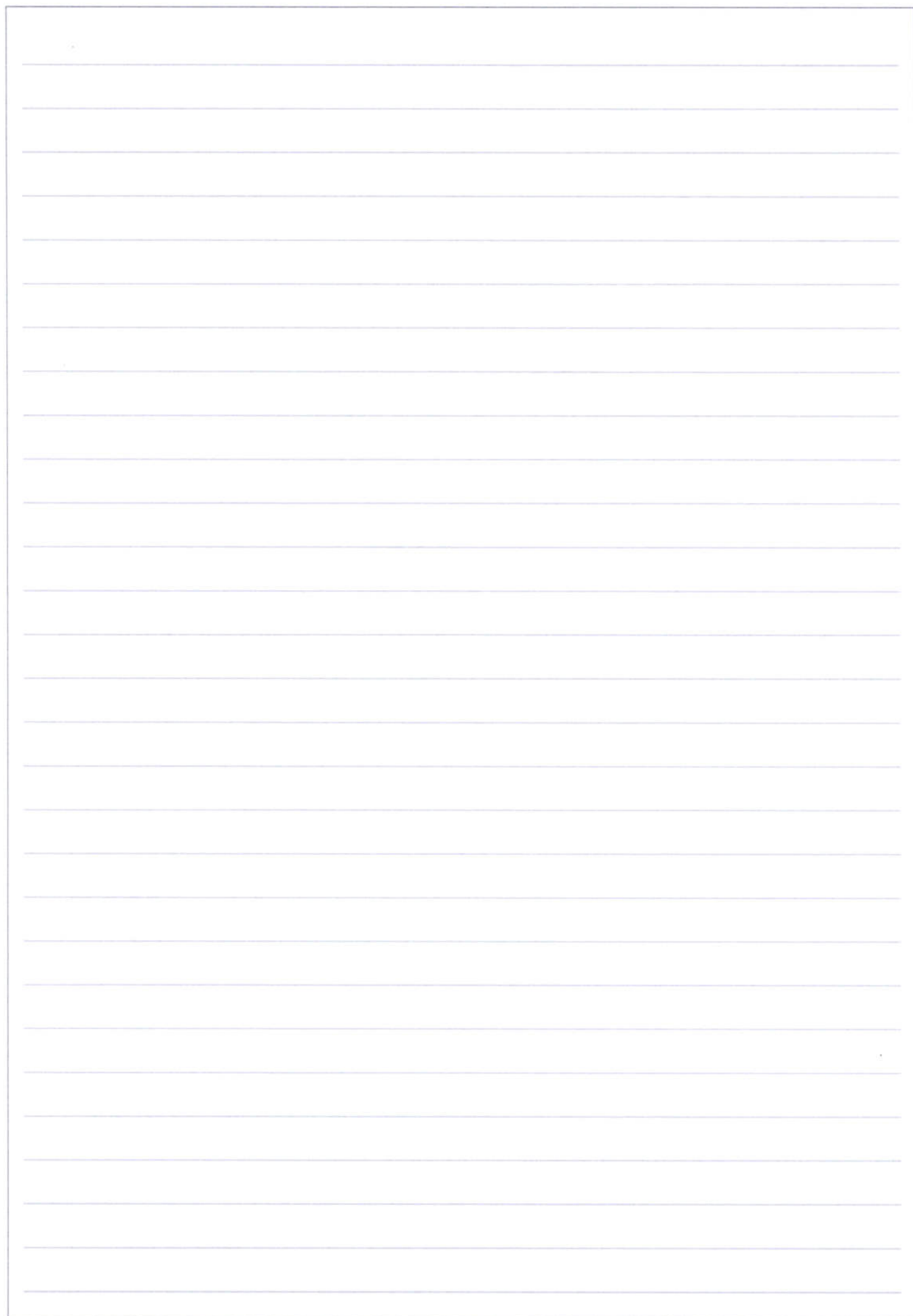
NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

A large rectangular area with horizontal blue lines, intended for writing. The lines are evenly spaced and cover the entire width of the area. The area is bounded by a thin black line on the top and sides, and a thin black line on the bottom.





Numéro d'inscription

501568



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

ESTADIEU

Prénom (s)

ANTOINE

20 / 20

Ecricome

Épreuve : mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille 08 / 11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page...

exercice 3.Partie 1. Soit $n \geq 2$.

$$1 - \underline{n=3} \quad \text{Soit } \pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) π est symétrique donc elle est diagonalisable

(b) On a :

$$\pi + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$(\pi + I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} -$$

Donc :

$$\boxed{(\pi + I)^2 = 3(\pi + I)}$$

Donc : un polynôme annulateur de π est : $P(x) = (x+1)^2 - 3(x+1)$.

Soit :

$$P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

(c) On a

$$P(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lambda = -1} \quad \text{ou} \quad \underline{\lambda = 2}.$$

$$\text{D'où : } \boxed{\text{Sp}(\pi) \subset \{-1, 2\}}.$$

• Montrons que -1 est valeur propre de π .

$$\text{On a : } (X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})$$

$$(\pi + I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions
donc -1 est bien valeur propre et -
 $E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$

- Montrons que λ est valeur propre de M .

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$(M - \lambda I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x + y + z = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - \lambda y + z = 0 \\ x + y - \lambda z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions
donc λ est valeur propre de M et :

$$E_\lambda = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

- De plus :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_\lambda \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ donc } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base}$$

de E_λ

et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sont non colinéaires et appartiennent à } E_{-\lambda}$$

Donc : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille libre et génératrice

de $\bar{E}_1$ -
Donc: $\left[\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right]$ est une base de $\bar{E}_1$

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad \text{Soit } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{On a: } PX = Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -x + z = b \\ -y + z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ -x + z = b \\ 3z = a + b + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a - z - x \\ x = \frac{1}{3}(a + b + c) - b \\ z = \frac{1}{3}(a + b + c) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a - \frac{1}{3}(a + b + c) - \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c \\ x = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c \\ z = \frac{1}{3}(a + b + c) \end{cases}$$

Numéro d'inscription

501568



Né(e) le

23/07/2004

Signature

Nom

ESTADIEU

Prénom(s)

ANTOINÉ

20 / 20

Ecricome

Épreuve : mathématiques appliquées

Sujet

☒ 1

ou

☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

09 / 11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page...

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a - 2b + c) \\ y = \frac{1}{3}(a + b - 2c) \\ z = \frac{1}{3}(a + b + c) \end{cases}$$

Donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $D = P^{-1}MP$.

$$(e) D = P^{-1}MP$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(p) Soit $P(k)$ la propriété " $\pi^n = PD^n P^{-1}$ ".

$$\begin{aligned} \underline{k=0} \quad \pi^0 &= I \\ PD^0 P^{-1} &= PP^{-1} = I \end{aligned}$$

Donc la propriété est initialisée.

On suppose $P(k)$ vraie pour $k \geq 0$ fixé.

On a :

$$\begin{aligned} \pi^{n+1} &= \pi^n \times \pi \\ &= PD^n P^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.

Donc, $P(n)$ est héréditaire.

Donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \pi^n = PD^n P^{-1}}.$$

(g) On admet qu'il existe a_n et b_n tels que

$$\pi^n = a_n \pi + b_n I_3.$$

On a donc

$$D^n = a_n D + b_n I.$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_n + b_n & 0 & 0 \\ 0 & -a_n + b_n & 0 \\ 0 & 0 & 2a_n + b_n \end{pmatrix}$$

On par identification:

$$\begin{cases} -a_n + b_n = (-1)^n \\ 2a_n + b_n = 2^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_n = 2^n - (-1)^n \\ -a_n + b_n = (-1)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \\ b_n = (-1)^n + \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n+1}) \end{cases}$$

Donc:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} \\ b_n &= (-1)^n + \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n+1}) \end{aligned}}$$

2 - Soit $n \geq 2$.

(a) Soit $P(n)$ la propriété " $J_n^n = n^{n-1} \bar{J}_n$ "

$$\underline{n=1}. \quad J_1^1 = J_1; \quad n^0 J_1 = J_1$$

Donc :

$P(1)$ est vraie, la propriété est initialisée.

On suppose $P(k)$ vraie pour $k \geq 1$ fixé.

$$\begin{aligned} J_n^{n+1} &= J_n^n \times J_n \\ &= n^{n-1} J_n \times J_n \\ &= n^{n-1} J_n^2 \\ &= n^{n-1} \times n J_n \\ &= n^n J_n \end{aligned}$$

Ainsi, $P(n)$ est vraie, donc $P(k)$ est héréditaire

Donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, J_n^k = n^{k-1} J_n} -$$

$$(b) \quad \boxed{\Pi_n = J_n - I_n -}$$

(c) On a J_n et I_n qui commutent donc par la formule du binôme de Newton
On a :

$$\Pi_n^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-I_n)^{n-i} \times J_n^n$$

Numéro d'inscription

501568



Né(e) le

23/07/2004

Signature

Nom

ESTADIEU

Prénom(s)

ANTOINETTE

20 / 20

Épreuve : mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

10 / 11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page...

$$= \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \times n^{i-1} \bar{J}_n + (-1)^k \bar{I}_n$$

$$= \left[\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \times n^{i-1} \right] \bar{J}_n + (-1)^k \bar{I}_n$$

$$\boxed{n^k = c_k \bar{J}_n + (-1)^k \bar{I}_n}$$

(d) On a :

$$c_k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{i-1}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^i$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^i + \frac{1}{n} \times (-1)^{k+1}$$

$$= \frac{1}{n} (n-1)^k + \frac{1}{n} (-1)^{k+1}$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{n} ((n-1)^k + (-1)^{k+1})}$$

NE RIEN ÉCRIRE

DANS CE CADRE

20 / 20

(e) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

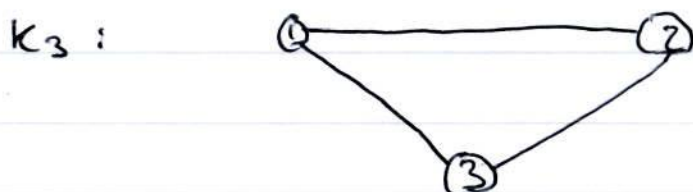
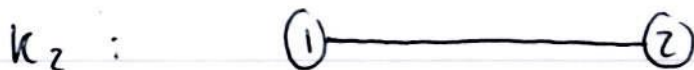
On note d_k les coefficients diagonaux
de Π_k

et $\bar{d}_k$ les coefficients non diagonaux.

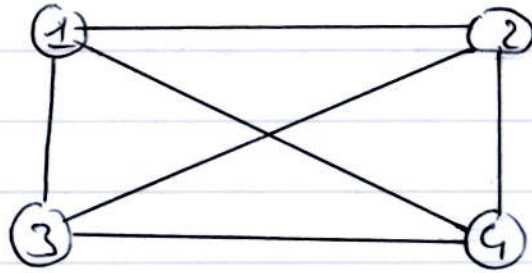
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \bar{d}_k = (-1)^k.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, d_k = c_k + (-1)^k.$$

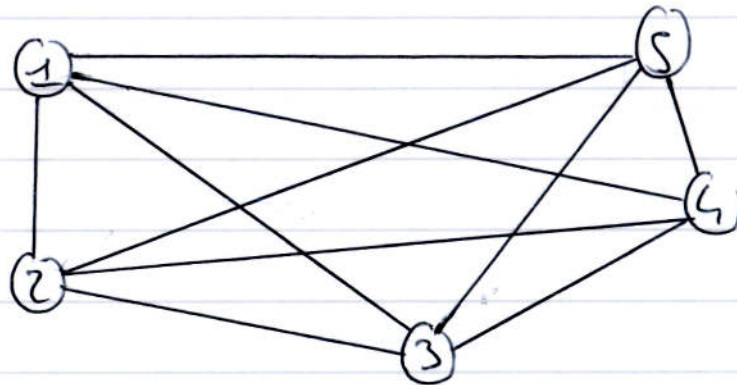
Partie II - Soit $n \geq 2$



K_4 :



K_5 :



4 - (a) la matrice d'adjacence du graphe K_n est A_n .

(b) Avec 2. e on prend le coefficient diagonal de la première ligne première colonne pour $n = 4$ et $K = 4$.

On a donc 2.0 - chemins de longueur 4 qui relie le sommet 1 à lui-même.

5 - le degré de chaque sommet du graphe K_n est $n-1$ car chaque sommet est relié à tous les autres sauf lui-même.

6 - Pour compter le nombre d'arêtes du graphe K_n , il faut compter le nombre de combinaisons de deux sommets possible (pour les relier) parmi les n sommets.

$$\text{C'est à dire } \boxed{\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}}$$

Partie III

Soit $k \geq 2$.

X_k = Numéro du sommet sur lequel on se trouve à la k ème étape.

$$X_0 = 1$$

$$7 - V_0 = (P(X_0=1) \quad P(X_0=2) \quad \dots \quad P(X_0=n))$$

$$\boxed{V_0 = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0)}$$

$$V_1 = (P(X_1=1) \quad P(X_1=2) \quad \dots \quad P(X_1=n))$$

$$\boxed{V_1 = (0 \quad \frac{1}{n-1} \quad \dots \quad \frac{1}{n-1})} \quad \text{car}$$

chaque on se déplace de manière équiprobable sur les $n-1$ autres sommets.

Numéro d'inscription

S 0 1 S 6 8



Né(e) le

23 / 07 / 2004

Signature

Nom

E S T A D I E U

Prénom (s)

A U T O I N E

20 / 20

Ecricome

Épreuve : mathématiques appliquées

Sujet ☒ 1 ou ☐ 2

(Veuillez cocher le N° de sujet choisi)

Les feuilles dont l'entête d'identification n'est pas entièrement renseigné ne seront pas prises en compte pour la correction.

Feuille

11 / 11

Numéro de table

005

Commencez à composer dès la première page...

8 - la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi_n \\ \frac{1}{(n-1)} & \pi_n \end{pmatrix}$$

9 - (a) Un état stable de la chaîne de Markov est une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients vaut 1 ($\forall \epsilon \in [0,1]$) et tel que si on le note S .
Alors $S = S \times$ matrice d'adjacence de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) On a :

$$\underbrace{V \times \frac{1}{(n-1)} \pi_n}_{(n-1)} = \left(\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{(n-1)}{n(n-1)} \quad \frac{(n-1)}{n(n-1)} \quad \dots \quad \frac{(n-1)}{n(n-1)} \right)$$

$$= \underline{V}$$

Donc, V est bien un état stable de la chaîne de Markov.

$$10 - (a) \quad V_{n+1} = V_n \times \left(\frac{1}{(n+1)} \Pi_n \right)$$

$$(b) \text{ Montrons par récurrence que } V_n = \frac{1}{(n+1)^k} V_0 \Pi_n^k$$

$$\underline{n = 0.} \quad V_0 = 0.$$

$$\frac{1}{(n+1)^0} V_0 \times I = V_0.$$

la propriété est initialisée.

On suppose $P(n)$ vraie pour $n \geq 0$.

$$V_{n+1} = V_n \times \frac{1}{(n+1)} \Pi_n$$

$$= \frac{1}{(n+1)^k} V_0 \Pi_n^k \times \frac{1}{(n+1)} \Pi_n$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{k+1}} V_0 \Pi_n^{k+1}.$$

Donc la propriété est héréditaire.

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = \frac{1}{(n-1)!} V_0 \Pi_n^n}$$

(c) On a :

$$V_n = \frac{1}{(n-1)!} V_0 \times (c_n \tilde{J}_n + (-1)^n \tilde{I}_n).$$

On admet la question.

|| On pourrait montrer que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} U_{[1,n]}.$$

|| Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi alors elle converge vers un état stable.

Ici cet état stable serait U .

