

Exercice 1

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.

On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$ et on a en particulier $u_0 = \frac{1}{4-x^2} dx$.

1. a) On cherche ici deux constantes réelles a et b telles que :

$$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{1}{4-x^2} \iff \frac{a(2+x) + b(2-x)}{(2-x)(2+x)} = \frac{1}{4-x^2} \iff \frac{(2a+2b) + (a-b)x}{4-x^2} = \frac{1}{4-x^2}.$$

Par identification des coefficients au numérateur, on veut donc a et b tels que :

$$\begin{cases} a-b &= 0 \\ 2a+2b &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=b \\ 4a=1 \end{cases} \iff a=b=\frac{1}{4}.$$

b) Du résultat précédent, on déduit :

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \right) dx = \frac{1}{4} \left[-\ln(2-x) + \ln(2+x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} (-\ln(1) + \ln(3) + \ln(2) - \ln(2)) = \frac{1}{4} \ln(3). \end{aligned}$$

2. On peut directement calculer :

$$u_1 = \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[\ln(4-x^2) \right]_0^1 = -\frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(4)) = \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(3).$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale :

$$4u_n - u_{n+2} = \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

b) La fonction Python ci-dessous calcule et renvoie la valeur de u_n , lorsque n est passé en argument :

```
def suite(n):
    if (-1)**n==1 : # se produit ssi n est pair!
        u = np.log(3)/4
        for k in range(2,n+1,2): # k varie avec un pas de 2
            u = 4*u - 1/(k-1) # car u_k = 4*u_(k-2) - 1/(k-1)
    else:
        u = np.log(2/np.sqrt(3)) # bien égal à ln(2) - 1/2*ln(3)
        for k in range(3,n+1,2):
            u = 4*u - 1/(k-1) # meme relation de récurrence!
    return u
```