MATHÉMATIQUES APPROFONDIES - Ecricome 2024

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Exercice 1

1. D'après le cours : la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (elle est donc divergente sinon), et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge aussi si et seulement si $\alpha > 1$.

L'énoncé notait alors $S = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et pour tout entier naturel N non nul : $S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ (*somme partielle de rang* N) et $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ (*reste d'ordre* N *de la série convergente*).

2. a) On sait que la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc pour tout entier $n\geqslant 2$:

$$\forall t\in[n\,;n+1],\ \frac{1}{(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{t^2}\leqslant\frac{1}{n^2}\quad\text{et}\quad\forall t\in[n-1\,;n],\ \frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{t^2}\leqslant\frac{1}{(n-1)^2}.$$

La fonction concernée est également continue sur $]0\,;+\infty[$, et $n-1<n<n+1$, donc d'après l'inégalité de la moyenne (ou la propriété de croissance de l'intégrale) :

$$\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{n^2}(n+1-n)\text{ et }\frac{1}{n^2}\big(n-(n-1)\big)\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2},\ \text{donc}\ \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

b) Soit un entier $N\geqslant 2$, on peut passer à la somme lorsque n varie de $N+1$ à $M>N+1$ dans l'inégalité précédente ; on obtient :

$$\sum_{n=N+1}^{M}\int_n^{n+1}\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^2}\leqslant\sum_{n=N+1}^{M}\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\iff\int_{N+1}^{M+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^2}\leqslant\int_{N}^{M}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$$\iff -\frac{1}{M+1}+\frac{1}{N+1}\leqslant\sum_{n=N+1}^{M}\frac{1}{n^2}\leqslant-\frac{1}{M}+\frac{1}{N}$$

d'après la relation de Chasles. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge, donc on peut passer à la limite dans cette double inégalité pour obtenir, puisque $\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M+1}=0=\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{M}$:

$$\frac{1}{N+1}\leqslant\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=R_N\leqslant\frac{1}{N}.$$

Remarquons que l'énoncé demande de prouver l'encadrement aussi pour $N=1$: on sait que $\frac{1}{3}\leqslant R_2\leqslant\frac{1}{2}$, et $R_1=\frac{1}{2}+R_2$, donc $\frac{5}{6}\leqslant R_1\leqslant 1$, ce qui implique bien $\frac{1}{2}\leqslant R_1\leqslant\frac{1}{1}$.

3. En remarquant que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $|S_N - S| = |-R_N| = R_N$ puisque le reste est positif : d'après ce qui précède, $|S_N - S| \leqslant 10^{-3}$ est vrai dès que $\frac{1}{N} \leqslant 10^{-3} \iff N \geqslant 10^3$. On peut donc prendre $N_0 = 10^3$.

4. On pose pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $T_N = S_N + \frac{1}{N+1}$.

   a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$: $\quad |T_N - S| = |S_N - S + \frac{1}{N+1}| = \left|\frac{1}{N+1} - R_N\right|$.

   Or $\frac{1}{N+1} \leqslant R_N \leqslant \frac{1}{N} \Longrightarrow 0 \leqslant R_N - \frac{1}{N+1} \leqslant \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{N+1-N}{N(N+1)}$,
   donc $\left|\frac{1}{N+1} - R_N\right| = R_N - \frac{1}{N+1} \leqslant \frac{1}{N^2+N} \leqslant \frac{1}{N^2}$, ce qui donne bien par transitivité de l'inégalité :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad |T_N - S| \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

   b) D'après ce qui précède : $|T_N - S| \leqslant 10^{-3}$ est vrai dès que $\frac{1}{N^2} \leqslant 10^{-3} \iff N^2 \geqslant 1000$, ce qui est vrai dès que $N \geqslant 32$ d'après les carrés fournis par l'énoncé : 31 n'est pas assez grand, 32 est le premier entier qui convient.

On pose maintenant pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls :

$$u_n(p) = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}.$$

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   a) Le terme général $u_n(p)$ est le produit de $(p+1)$ facteurs, nombre indépendant de n, et chacun de ces facteurs est équivalent à n, donc :

$$u_n(p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+1}}.$$

   b) Puisque $p \in \mathbb{N}^*$, alors $p+1 \geqslant 2 > 1$, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{p+1}}$ converge (le critère a été rappelé à la question 1). Le critère d'équivalence des séries à termes positifs assure alors que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(p)$ est elle-même convergente.

On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\quad U(p) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(p)$.

6. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n(1) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc les réels $a = 1$ et $b = -1$ conviennent.

   b) On a alors :

$$U(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1.$$

7. a) Soit un couple (n, p) d'entiers naturels tel que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} u_n(p-1) - u_{n+1}(p-1) &= \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+1+p-1)} \\ &= \frac{n+p-n}{n(n+1)\cdots(n+p-1)(n+p)} = \frac{p}{n(n+1)\cdots(n+p)} = p \cdot u_n(p). \end{aligned}$$

b) D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$U(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(p)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{p}\big(u_n(p-1)-u_{n+1}(p-1)\big)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{p}\big(u_1(p-1)-u_N(p-1)\big)=\frac{1}{p}\times\frac{1}{1\times 2\times\cdots\times p}=\frac{1}{p\cdot p!}.$$

Le fait que $\lim\limits_{N\to+\infty}u_N(p-1)=0$ du fait qu'il s'agit du terme général d'une série convergente.

8. a) Montrons par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$ que la propriété

$$\mathcal{P}(p):\text{"}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n^2}=\frac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}+\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)\text{"}$$

est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $p=1$:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1!}{n^2(n+1)}+\sum_{k=1}^{1}(k-1)!u_n(k)=\frac{1}{n^2(n+1)}+0!u_n(1)=\frac{1}{n^2(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1+n}{n^2(n+1)}=\frac{1}{n^2},$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie pour un certain entier $p\in\mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(p+1)$ est encore vraie, soit : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n^2}=\dfrac{(p+1)!}{n^2(n+1)\cdots(n+p+1)}+\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)!u_n(k).$

Par hypothèse de récurrence :

$$\frac{1}{n^2}=\frac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}+\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)=\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)!u_n(k)+\frac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}-p!u_n(p+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)!u_n(k)+\frac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}-\frac{p!}{n(n+1)\cdots(n+p+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)!u_n(k)+\frac{p!(n+p+1-n)}{n^2(n+1)\cdots(n+p+1)}=\frac{(p+1)!}{n^2(n+1)\cdots(n+p+1)}+\sum_{k=1}^{p+1}(k-1)!u_n(k),$$

donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(p)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$: pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}=\dfrac{1}{p!}\Big(\dfrac{1}{n^2}-\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)\Big)$ est le terme général d'une série convergente, comme combinaison linéaire de termes généraux de séries toutes convergentes ($\dfrac{1}{n^2}$ et les $u_n(k)$) ; on peut donc passer à la somme quand n varie de 1 à $+\infty$ dans l'égalité précédente, de sorte que :

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{p}(k-1)!u_n(k)$$

$$=p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}+\sum_{k=1}^{p}(k-1)!\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(k)=p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}+\sum_{k=1}^{p}(k-1)!U(k)$$

$$=p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}+\sum_{k=1}^{p}(k-1)!\frac{1}{k\cdot k!}=\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}+p!\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}.$$

9. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^{p+2}}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout entier $n \geqslant 2$:
$\forall x \in [n-1\,;n]$, $\dfrac{1}{n^{p+2}} \leqslant \dfrac{1}{x^{p+2}}$, donc d'après l'inégalité de la moyenne (la fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $n-1<n$) :

$$\frac{n+1-n}{n^{p+2}} = \frac{1}{n^{p+2}} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p+2}}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p+2}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{p+2}}$ convergent, donc la sommation de la double inégalité précédente donne, pour tout $N \geqslant 2$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+2}} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p+2}} = \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{p+2}} = \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{(p+1)x^{p+1}}\right]_N^M = \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{N^{p+1}}.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} \leqslant \dfrac{1}{n^{2+p}}$, alors on a bien :

$$\forall (N,p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad 0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} \leqslant \frac{1}{p+1}\cdot\frac{1}{N^{p+1}}.$$

10. on suppose maintenant que $p=3$. On pose donc pour tout entier naturel N non nul :

$$U_N = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k^2} + 3!\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{49}{36} + 6\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

D'après 8.b) avec $p=3$: pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$|U_N - S| = 6\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)(n+3)} \leqslant \frac{6}{4}\cdot\frac{1}{N^4},$$

de sorte que $|U_N - S| \leqslant 10^{-3}$ est vrai dès que $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{N^4} \leqslant 10^{-3} \iff N^4 \geqslant 150 \iff N \geqslant 4$, toujours grâce aux valeurs de 3^4 et 4^4 données par l'énoncé.

11. Le graphique fourni illustre les vitesses de convergence comparées de S_N, T_N et U_N vers S : U_N converge infiniment plus vite vers S que T_N, qui converge elle-même infiniment plus vite vers S que S_N. Pour une erreur $\varepsilon = 10^{-3}$, on retrouve bien que $|U_N - S|$, $|T_N - S|$, $|S_N - S|$ passent en-dessous de cette valeur maximale à partir des seuils de rangs N de l'ordre de ceux qui ont été obtenus précédemment.

Exercice 2

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, $x_0, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts.

Partie 1

On considère l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big) \end{array}$.

1. a) Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi\big(\lambda.P + Q\big) &= \big(\lambda.P(x_0) + Q(x_0), \lambda.P(x_1) + Q(x_1), \ldots, \lambda.P(x_n) + Q(x_n)\big) \\ &= \lambda.\big(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\big) + \big(Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n)\big) = \lambda.\Phi(P) + \Phi(Q), \end{aligned}$$

donc Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$:

$$\Phi(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}} \iff \big(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\big) = (0, 0, \ldots, 0) \iff \forall k \in [\![0\,;n]\!],\ P(x_k) = 0.$$

Le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ admet $n+1$ racines distinctes : c'est donc le polynôme nul, et par conséquent $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$. L'inclusion réciproque est toujours vraie car Φ est linéaire, donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}_n[x]}\}$, et Φ est injective.

b) L'application Φ est linéaire injective, entre les deux espaces vectoriels $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ qui sont de même dimension $n+1$: elle est donc bijective (conséquence du théorème du rang).

Par conséquent : pour tout élément $(y_0, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\Phi(P) = (y_0, \ldots, y_n) \iff P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1, \ldots, P(x_n) = y_n.$$

2. Pour tout entier i de $[\![0\,;n]\!]$: le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $y_i = 1$ et $y_j = 0$ pour tout $j \in [\![0\,;n]\!] \setminus \{i\}$ admet un unique antécédent L_i par l'application bijective Φ, tel que :

$$\forall j \in [\![0\,;n]\!], \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

- Le polynôme L_0 a pour racines $x_1,\ x_2$ et x_3 et c'est un polynôme de $R_3[x]$, donc L_0 est de la forme $L_0(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$.

  On sait aussi que : $L_0(x_0) = 1 \iff a(-2)(-3)(-4) = 1 \iff a = -\frac{1}{24}$,

  donc $\boxed{L_0(x) = -\dfrac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)}$.

- De même, $L_1 \in \mathbb{R}_3[x]$ a pour racines $x_0,\ x_2$ et x_3 donc est de la forme $a(x+1)(x-2)(x-3)$, et :

  $L_1(x_1) = 1 \iff a.2(-1)(-2) = 1 \iff a = \frac{1}{4}$, donc $\boxed{L_1(x) = \dfrac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-3)}$.

- $L_2 \in \mathbb{R}_3[x]$ a pour racines x_0, x_1 et x_3, donc est de la forme $a(x+1)(x-1)(x-3)$

  avec $L_2(x_2) = 1 \iff a.3.1.(-1) = 1 \iff a = -\frac{1}{3}$, donc $\boxed{L_2(x) = -\dfrac{1}{3}(x+1)(x-1)(x-3)}$.

- $L_3 \in \mathbb{R}_3[x]$ a pour racines x_0, x_1, x_2, donc est de la forme $a(x+1)(x-1)(x-2)$

  avec $L_3(x_3) = 1 \iff a.4.2.1 = 1 \iff a = \frac{1}{8}$, donc $\boxed{L_3(x) = \dfrac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2)}$.

4. Dans le cas général : pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $L_i \in \mathbb{R}_n[x]$ admet les n racines distinctes x_j pour $j \in [\![0\,;n]\!] \setminus \{i\}$, donc d'après le théorème de factorisation : il existe une constante a telle que

$$L_i(x) = a \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x - x_j)$$

Comme $L_i(x_i) = 1$, alors $a \prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j) \iff a = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$, de sorte que :

$$\forall i \in [\![0\,;n]\!], \quad L_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}.$$

Comme à un facteur constant près, L_i est le produit de n facteurs unitaires de degré 1, alors $\deg(L_i) = n$, et de plus, le coefficient dominant de L_i est $\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j)}$.

$\mathscr{L}$ désigne la famille $(L_0, \ldots, L_n)$. On considère maintenant pour P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) Q(x_k).$$

5. Montrons que $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
   - Pour tout $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_n[x])^3$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $$\langle \lambda.P + Q, R \rangle = \sum_{k=0}^{n} \big(\lambda.P(x_k) + Q(x_k)\big) R(x_k) = \lambda. \sum_{k=0}^{n} P(x_k) R(x_k) + \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) R(x_k) = \lambda.\langle P\,, R \rangle + \langle Q\,, R \rangle,$$

   donc $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable.
   - Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$:

   $$\langle P\,, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) Q(x_k) = \sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P(x_k) = \langle Q\,, P \rangle$$

   par commutativité du produit des réels : l'application $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est donc symétrique, et par conséquent bilinéaire grâce au premier point.
   - Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$: $\langle P\,, P \rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} \big(P(x_k)\big)^2 \geqslant 0$,
   - et de plus : $\langle P\,, P \rangle = 0 \iff \sum\limits_{k=0}^{n} \big(P(x_k)\big)^2 = 0 \iff \forall k \in [\![0\,;n]\!],\ P(x_k) = 0$ car une somme de réels positifs est nulle, si et seulement si chacun de ses termes est nul.
   Le polynôme P, élément de $\mathbb{R}_n[x]$, doit donc avoir $n+1$ racines distinctes : c'est forcément le polynôme nul, donc $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est définie positive.

   On a bien démontré que $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
6. Pour tout couple $(i, j) \in [\![0\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\langle L_i\,, L_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k) L_j(x_k) = L_i(x_i) L_j(x_i) = 0$$

car dans la somme, tous les termes sont nuls dès que $k \neq i$, et puisque $L_j(x_i) = 0$ dès que $i \neq j$: le seul terme restant de la somme est en fait nul lui aussi.

Pour tout $i \in \llbracket$, selon le même principe :

$$\langle L_i\,, L_i\rangle = \sum_{k=0}^{n} \big(L_i(x_k)\big)^2 = \big(L_i(x_i)\big)^2 = 1^2 = 1.$$

La famille $\mathscr{L}$ est ainsi une famille orthonormée formée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[x]$: comme cet espace est justement de dimension $n+1$, on en déduit que $\mathscr{L}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ pour le produit scalaire défini dans cet exercice.

7. Comme $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$: pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe une unique décomposition de ce polynôme sous la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k.L_k$ dans cette base.

   Si on évalue cette égalité en chaque point x_j $(0 \leqslant j \leqslant n)$, au vu de la définition des L_i dans la question 2., on obtient :

$$\forall j \in \llbracket 0\,;n\rrbracket, \quad P(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.L_k(x_j) = \alpha_j.L_j(x_j) \iff \alpha_j = P(x_j).$$

   Le $(n+1)$-uplet des coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[x]$ dans la base $\mathscr{L}$ est bien $\big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big)$.

Partie 2

On pose maintenant $N_0 = 1$ et pour tout $i \in \llbracket 1\,;n\rrbracket$: $\quad N_i(x) = \displaystyle\prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$.

8. Dans cette question uniquement, on suppose que $x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

   a) Par définition :

   $N_1(x) = (x-x_0) = (x+1),\ N_2(x) = (x-x_0)(x-x_1) = (x+1)(x-1),\ N_3(x) = (x+1)(x-1)(x-2).$

   b) D'après 7., les coordonnées de chaque polynôme N_i $(0 \leqslant i \leqslant 4)$ correspondent au quadruplet $\big(N_i(x_0), N_i(x_1), N_i(x_2), N_i(x_3)\big)$, soit ici :

   - pour N_0 : $(1, 1, 1, 1)$
   - pour N_1 : $(0, 2, 3, 4)$
   - pour N_2 : $(0, 0, 3, 8)$
   - pour N_3 : $(0, 0, 0, 8)$

   c) La matrice M est alors celle des coordonnées de ces quatre polynômes, écrites en colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Cette matrice est clairement inversible, puisqu'elle est triangulaire inférieure, avec des éléments diagonaux tous non nuls.

On calcule M^{-1} en résolvant le système $MX = Y$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et de second membre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$:

$$MX = Y \iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & & & & & = & a \\ x & + & 2y & & & & & = & b \\ x & + & 3y & + & 3z & & & = & c \\ x & + & 4y & + & 8z & + & 8t & = & d \end{array}\right. \iff \begin{cases} x & = a \\ 2y & = b - a \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y + 3z & = c - a \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 4y + 8z + 8t & = d - a \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = a \\ 2y & = b-a \\ 6z & = a-3b+2c \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2 \\ 8z+8t & = a-2b+d \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = a \\ y & = -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\ 6z & = a-3b+2c \\ 24t & = -a+6b-8c+3d \quad L_4 \leftarrow 3L_4 - 4L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = a \\ y & = -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \\ z & = \frac{1}{6}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c \\ t & = -\frac{1}{24}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{3}c+\frac{1}{8}d \end{cases}, \text{ donc } \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}.$$

9. Il est clair que $\deg(N_0) = 0$ et que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, N_i est de degré i comme produit de i facteurs de degré 1.

   La famille $\mathscr{N} = (N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est donc une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$ de degrés deux à deux distincts : c'est donc une famille libre, et puisque $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1 = \mathrm{Card}(\mathscr{N})$, alors $\mathscr{N}$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

10. a) D'après la question 7., les coordonnées du polynôme N_0 dans la base $\mathscr{L}$ forment le $(n+1)$-uplet $\big(N_0(x_0), N_0(x_1), \ldots, N_0(x_n)\big) = (1, 1, \ldots, 1)$ puisque N_0 est le polynôme constant égal à 1. Par conséquent, on a bien :

$$N_0 = \sum_{k=0}^{n} 1.L_k = \sum_{k=0}^{n} L_k.$$

    b) Selon le même principe qu'à la question précédente : pour tout entier i de $[\![1\,;n]\!]$, on cherche les coordonnées de N_i sous la forme du $(n+1)$-uplet des valeurs $\big(N_i(x_0), N_i(x_1), \ldots, N_i(x_n)\big)$.

    Par définition, on sait que $N_i(x) = \displaystyle\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)$ a pour racines $x_0,\ x_1, \ldots, x_{i-1}$, donc les i premières coordonnées de N_i dans la base $\mathcal{L}$ sont nulles, et pour tout $k \in [\![i\,;n]\!]$,

    on a simplement $N_i(x_j) = \displaystyle\prod_{j=0}^{i-1}(x_k - x_j)$, donc en effet :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \quad N_i = \sum_{k=0}^{n} N_i(x_k) L_k = \sum_{k=i}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_k - x_j) L_k.$$

11. La matrice de passage A de la base $\mathscr{L}$ à la base $\mathscr{N}$ a pour coefficients les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathscr{N}$, dans l'ancienne base $\mathscr{L}$. Au vu des résultats de la question 10., on a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & (x_1 - x_0) & 0 & & & 0 \\ 1 & (x_2 - x_0) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & (x_{n-1} - x_0) & (x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) & & \displaystyle\prod_{j=0}^{n-2}(x_{n-1} - x_j) & 0 \\ 1 & (x_n - x_0) & (x_n - x_1)(x_n - x_0) & & \displaystyle\prod_{j=0}^{n-2}(x_n - x_j) & \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible puisque c'est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{R}_n[x]$, et comme elle est triangulaire inférieure, alors son inverse est aussi triangulaire inférieure.

La base $\mathscr{L}$ étant orthonormée pour le produit scalaire considéré dans cet exercice : si $\mathscr{N}$ était aussi orthonormée, alors la matrice de passage A serait orthogonale, donc d'inverse égale à sa transposée ${}^tA$. Ce n'est évidemment pas le cas, puisque ${}^tA$ est triangulaire *supérieure*.

On conclut donc que $\mathscr{N}$ n'est *pas* orthonormée.

On considère $n+1$ points $X_0 = (x_0, y_0), \ldots, X_n = (x_n, y_n)$.

Pour tout entier naturel k de $[\![0\,;n]\!]$, on note P_k le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $X_0, \ldots, X_k$: c'est l'unique polynôme de degré au plus k vérifiant $P_k(x_0) = y_0, \ \ldots, \ P_k(x_k) = y_k$.

12. Le polynôme P_n appartient à $\mathbb{R}_n[x]$ dont $\mathscr{N} = (N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est une base : il existe bien un unique $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de réels tels que

$$P_n(x) = a_0 N_0(x) + a_1 N_1(x) + \cdots + a_n N_n(x).$$

13. Dans cette question uniquement, l'énoncé admet que : $\forall k \in [\![1\,;n]\!], \ a_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)}$.

Considérons que les données sont représentées par les deux matrices $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

a) La fonction `Python` ci-dessous prend en entrée X, matrice-colonne à $n+1$ lignes, un entier i et un entier k et renvoie le produit $\displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} (x_i - x_j)$:

```python
def prodX(X,i,k):
    p = 1
    for j in range(k+1):
        if j != i:
            p = p * (X[i] - X[j])
    return p
```

b) La fonction `Python` ci-dessous prend en entrée X et Y et renvoie les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ selon la formule admise ci-dessus, sous la forme d'une matrice-colonne :

```python
def coeff(X,Y):
    a = np.zeros((n+1,1))
    a[0] = y[0]
    for k in range(1,n):
        s = 0
        for i in range(k+1):
            s = s + y[i]/prodX(X,i,k)
        a[k] = s
    return a
```

c) La fonction précédente permet de calculer les coefficients de chaque polynôme L_i pour $i \in [\![0\,;n]\!]$: il suffit à chaque fois, d'utiliser la fonction `coeff` avec le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et le vecteur Y_i dont toutes les composantes y_j sont nulles, sauf y_i qui vaut 1.

La matrice colonne obtenue est à chaque fois, celle des coordonnées de L_i dans la base $\mathscr{N}$; en concaténant ces $n+1$ matrices colonnes, on obtiendra la matrice de passage de $\mathscr{N}$ à $\mathscr{L}$, donc l'inverse de la matrice A.

La fonction `coeff` est donc appelée $n+1$ fois.

14. a) En évaluant l'égalité obtenue à la question 12., et du fait que par définition, x_0 est racine de chacun des polynômes $(N_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, on obtient :

$$P_n(x_0) = a_0N_0(x_0) \iff y_0 = a_0 \text{ puisque } N_0 \text{ est constant égal à } 1$$

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $\deg(N_i) = i$ donc seul le polynôme N_n possède un terme de degré n ; il est clair par définition d'ailleurs, que N_n est unitaire, donc dans l'écriture $P_n(x) = a_0N_0(x) + \cdots + a_nN_n(x)$, le coefficient du monôme de degré n de P_n est bien a_n.

b) Toujours d'après la question 7. : les coordonnées de P_n dans la base $\mathscr{L}$ constituent le $(n+1)$-uplet $\big(P_n(x_0), P_n(x_1), \ldots, P_n(x_n)\big) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ par définition de P_n, donc :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_iL_i(x).$$

c) On a vu à la question 4. que le coefficient dominant, de degré n, de L_i est $\dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(x_i - x_j)}$, donc le coefficient du monôme de degré n de P_n est $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(x_i - x_j)}$, qui est donc aussi la valeur de a_n.

15. Soit k un entier naturel de $[\![1\,;n-1]\!]$. On pose $Q_k(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_jN_j(x)$.

a) Rappelons que pour tout $j \in [\![0\,;k]\!]$, $\deg(N_j) = j \leqslant k$, donc Q_k est un polynôme de $\mathbb{R}_k[x]$ comme combinaison linéaire d'éléments de cet espace vectoriel.

b) Pour tout entier $i \in [\![1\,;k]\!]$: $Q_k(x_i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_jN_j(x_i)$, qui est aussi égal à $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_jN_j(x_i)$, puisque dès que $j > k$, alors $j > i$ et x_i est alors racine de N_j : les termes éventuellement en plus dans la deuxième somme, sont en fait nuls.

Mais alors, d'après 12. : $Q_k(x_i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_jN_j(x_i) = P_n(x_i) = y_i$.

c) Le polynôme $Q_k \in \mathbb{R}_k[x]$ est donc, d'après ce qui précède, le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $X_0, \ldots, X_k$; par unicité d'un tel polynôme, on en déduit :

$$Q_k(x) = P_k(x) \iff P_k(x) = a_0N_0(x) + \cdots + a_kN_k(x).$$

d) Tout ce qui a été fait à la question 14 pour a_n, peut donc être encore transposée au cas de chaque entier $k \in [\![1\,;n-1]\!]$ en remplaçant partout dans le rasionement, n par k (cela signifie seulement qu'on ne considère que les points $X_0, \ldots, X_k$ pour définir les polynômes associés).
Le résultat de 14.c) s'applique donc moyennant ce transfert, de sorte qu'en effet :

$$a_k = \sum_{i=0}^{k}\frac{y_i}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i - x_j)}.$$

Problème

Partie 1

On considère un paramètre réel $a > 0$, et l'on définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}.$$

1. Puisque $a > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + a^2 \geqslant a^2 > 0$ donc f est positive et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule jamais.

   Soient A et B deux réels (tels que $B < A$). Si on sait directement que $x \mapsto \frac{1}{a}\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$, on peut écrire :

   $$\int_B^A f(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{\pi}\int_B^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{a}{\pi}\left[\frac{1}{a}\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_B^A = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}\left(\frac{A}{a}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{B}{a}\right)\right),$$

   où puisque $a > 0$:

   $$\lim_{A\to+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{A}{a}\right) = \lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{B\to-\infty} \text{Arctan}\left(\frac{B}{a}\right) = \lim_{x\to-\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2},$$

   de sorte que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\pi} = 1$, ce qui achève de prouver que f est une densité de probabilité.

   Remarque : si on connaît seulement le fait que Arctan est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, on doit commencer par écrire :

   $$\int_B^A f(x)\mathrm{d}x = \frac{a}{\pi}\int_B^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{a}{\pi}\int_B^A \frac{\mathrm{d}x}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a\pi}\int_B^A \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

   et on réalise ensuite le changement de variable affine, donc licite : $t = \frac{x}{a}$ qui donne :

   $$\int_B^A f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{a\pi}\int_{B/a}^{A/a} \frac{a\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\int_{B/a}^{A/a} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}\left(\frac{A}{a}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{B}{a}\right)\right)$$

   et on conclut comme précédemment.

2. La fonction de répartition F associée à f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{B}{a}\right)\right)$$
   $$= \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}, \quad CQFD.$$

Si une variable aléatoire réelle X a pour densité la fonction f, on dit que X suit *la loi de Cauchy de paramètre* $a > 0$.
Lorsque $a = 1$, on dit que X suit la loi de Cauchy *standard*.

3. Une variable aléatoire X suivant une loi de Cauchy, admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Or sur $[1\,;+\infty[$, $x \mapsto xf(x)$ est continue positive, avec : $\quad xf(x) = \dfrac{ax}{\pi(x^2+a^2)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{ax}{\pi x^2} = \dfrac{a}{\pi}\cdot\dfrac{1}{x}$.

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge puisqu'elle est ici d'exposant $\alpha = 1 \geqslant 1$: le critère d'équivalence des intégrales de fonctions continues positives, assure que $\displaystyle\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ diverge, et par conséquent $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\mathrm{d}x$ diverge aussi.

Une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy n'admet donc pas d'espérance.

4. Soit X une variable aléatoire réelle.
   - Si X suit la loi de Cauchy standard, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \dfrac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}(x) + \dfrac{1}{2}$ (d'après la formule obtenue à la question 2. avec $a = 1$), et alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{aX}(x) = \mathbf{P}(aX \leqslant x) \overset{a\geq 0}{=} \mathbf{P}\big(X \leqslant \frac{x}{a}\big) = F_X\big(\frac{x}{a}\big) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{x}{a}\Big) + \frac{1}{2},$$
   donc aX suit bien la loi de Cauchy de paramètre a, caractérisée par sa fonction de répartition.
   - Réciproquement, si aX suit la loi de Cauchy de paramètre a, alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) \overset{a\geq 0}{=} \mathbf{P}(aX \leqslant ax) = F_{aX}(ax) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{ax}{a}\Big) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}(x) + \frac{1}{2},$$
   donc X suit bien la loi de Cauchy standard.

   On a donc démontré par double implication, l'équivalence demandée.

5. Soit k un entier naturel non nul. Soit x un réel non nul.
   Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{1}{(t^2+k^2)\big((x-t)^2+1\big)}$.

   L'énoncé admettait qu'il existe des réels α, β, γ tels que pour tout réel t, $g(t) = \dfrac{\alpha t+\beta}{t^2+k^2} + \dfrac{\alpha(x-t)+\gamma}{(x-t)^2+1}$.

   a) En réduisant au même dénominateur le membre de droite de l'égalité précédente, on obtient :
$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\alpha t+\beta}{t^2+k^2} + \frac{\alpha(x-t)+\gamma}{(x-t)^2+1} &= \frac{(\alpha t+\beta)(x^2-2xt+t^2+1) + (t^2+k^2)(\alpha x - \alpha t + \gamma)}{(t^2+k^2)\big((x-t)^2+1\big)} \\ &= \frac{(-\alpha x+\beta+\gamma)t^2 + (\alpha x^2+\alpha-\alpha k^2-2\beta x)t + (\beta x^2+\beta+\alpha k^2 x+\gamma k^2)}{(t^2+k^2)\big((x-t)^2+1\big)}.\end{aligned}$$
   Par identification des coefficients aux numérateurs vis-à-vis de l'expression initiale $\dfrac{1}{(t^2+k^2)\big((x-t)^2+1\big)}$ de $g(t)$, vus comme des polynômes en t, on en déduit bien les relations :
$$\begin{cases} -\alpha x+\beta+\gamma & = 0 \\ \alpha x^2+\alpha-\alpha k^2-2\beta x & = 0 \\ \beta x^2+\beta+\alpha k^2 x+\gamma k^2 & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta+\gamma & = \alpha x \\ \alpha(x^2+1-k^2) & = 2\beta x \\ \beta(x^2+1)+\alpha x k^2+\gamma k^2 & = 1 \end{cases}$$

   b) Puisque x est un réel non nul, alors la deuxième ligne du système précédent est équivalente à $\alpha x(x^2+1-k^2) = 2\beta x^2$; on peut alors procéder par substitution grâce à L_1 dans L_2 et on obtient : $\beta(x^2+1)+(\beta+\gamma)k^2+\gamma k^2 = 1$.
   On peut aussi multiplier des deux membres de L_2 par x et développer, pour obtenir :
$$\alpha x^2+\alpha x-\alpha x k^2 = 2\beta x^2 \iff \alpha x k^2 = \alpha x(x^2+1) - 2\beta x^2 = (\beta+\gamma)(x^2+1) - 2\beta x^2,$$
   et on peut alors susbstituer $\alpha x k^2$ par cette expression dans L_3, ce qui donne :
$$\beta(x^2+1)+\beta(x^2+1)+\gamma(x^2+1)-2\beta x^2+\gamma k^2 = 1 \iff 2\beta+\gamma(x^2+k^2+1) = 1.$$
   On a ainsi bien obtenu les deux égalités demandées.

c) Puisque $x^2+k^2+1=x^2+(k+1)^2-2k$, alors les deux équations précédentes se réécrivent :

$$\begin{cases}\beta\big(x^2+(k+1)^2\big)-2\beta k+2\gamma k^2=1\\ 2\beta+\gamma\big(x^2+(k+1)^2\big)-2\gamma k=1\end{cases} \overset{L_1+k.L_2}{\Longrightarrow} (\beta+\gamma k)\big((x^2+(k+1)^2\big)=k+1 \Longrightarrow \boxed{\beta+\gamma k=\frac{k+1}{x^2+(k+1)^2}}.$$

d) Pour tout réel t, $\frac{t^2+k^2}{(x-t)^2+1}$ est un réel strictement positif comme quotient de deux réels qui le sont, donc G est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on peut d'ailleurs écrire le premier terme de l'expression de $G(t)$ sous la forme $\dfrac{\alpha}{2}\ln(t^2+k^2)-\dfrac{\alpha}{2}\ln\big((x-t)^2+1\big)$ pour dériver plus facilement :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\ G'(t)&=\frac{\alpha}{2}\times\frac{2t}{t^2+k^2}-\frac{\alpha}{2}\times\frac{-2(x-t)}{(x-t)^2+1}+\frac{\beta}{k}\times\frac{1}{k}\times\frac{1}{1+\left(\frac{t}{k}\right)^2}+\gamma\times\frac{1}{1+(t-x)^2}\\ &=\frac{\alpha t}{t^2+k^2}+\frac{\alpha(x-t)}{(x-t)^2+1}+\frac{\beta}{t^2+k^2}+\frac{\gamma}{(x-t)^2+1}\\ &=\frac{\alpha t+\beta}{t^2+k^2}+\frac{\alpha(x-t)+\gamma}{(x-t)^2+1}=g(t),\end{aligned}$$

donc G est bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

6. Soit k un entier naturel non nul. Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre k, et Y une variable aléatoire de loi de Cauchy standard, indépendante de X. L'énoncé admettait que $X+Y$ est une variable à densité.

a) D'après le cours, on sait alors qu'une densité de $X+Y$ est obtenue par le produit de convolution d'une densité de X et d'une densité de Y : il est défini, sous réserve de convergence, pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(t)f_Y(x-t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{\pi(t^2+k^2)}\times\frac{1}{\pi\big((x-t)^2+1\big)}\mathrm{d}t\\ &=\frac{k}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t^2+k^2)\big((x-t)^2+1\big)}\mathrm{d}t=\frac{k}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour tout réel x, $\varphi(x)$ est bien égal à $\dfrac{k}{\pi^2}\Big(\lim\limits_{t\to+\infty}G(t)-\lim\limits_{t\to-\infty}G(t)\Big)$, sous réserve d'existence de ces limites.

b) Au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$: $\dfrac{t^2+k^2}{(x-t)^2+1}\underset{t\to\pm\infty}{\sim}\dfrac{t^2}{(-t)^2}=1$, donc $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{t^2+k^2}{(x-t)^2+1}=1$, et par continuité du logarithme en 1, $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\left(\dfrac{t^2+k^2}{(x-t)^2+1}\right)=\ln(1)=0$.

Par ailleurs, puisque $k>0$: $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{t}{k}\Big)=\dfrac{\pi}{2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{Arctan}(t-x)$,

et $\lim\limits_{t\to-\infty}\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{t}{k}\Big)=-\dfrac{\pi}{2}=\lim\limits_{t\to-\infty}\mathrm{Arctan}(t-x)$, donc :

$$\lim_{t\to+\infty}G(t)=\frac{\beta}{k}\cdot\frac{\pi}{2}+\gamma\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2k}(\beta+\gamma k)=\frac{\pi(k+1)}{2k\big(x^2+(k+1)^2\big)}\text{ et }\lim_{t\to-\infty}G(t)=-\frac{\beta}{k}\cdot\frac{\pi}{2}+\gamma\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi(k+1)}{2k\big(x^2+(k+1)^2\big)}$$

d'après 5.c), donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \varphi(x)=\frac{k}{\pi^2}\times2\times\frac{\pi(k+1)}{2k\big(x^2+(k+1)^2\big)}=\frac{k+1}{\pi\big(x^2+(k+1)^2\big)}.$$

On reconnaît bien la densité de la loi de Cauchy de paramètre $k+1$: c'est donc la loi suivie par $X+Y$.

7. Le résultat précédent rend logique le fait de démontrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(k)$: "si $X_1, \ldots, X_k$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Cauchy de paramètre a, alors $X_1 + \ldots + X_k$ suit la loi de Cauchy de paramètre a" est vraie pour tout entier naturel k non nul.

   $\boxed{\text{C.}}$ Si $k = 1$, alors X_1 suit bien par hypothèse la loi de Cauchy de paramètre a, et c'est le seul terme de la somme, donc $\mathcal{P}(1)$ est évidemment vraie.

   Remarque : l'initialisation aurait en fait plus de sens à partir du rang 2...

   $\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'alors $\mathcal{P}(k+1)$ est encore vraie.

   Soient donc $X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}$ des variables aléatoires qui suivent la loi de Cauchy de paramètre a, mutuellement indépendantes : d'après 4., si on pose $Y_i = \frac{X_i}{a}$ pour tout $i \in [\![1\,;k+1]\!]$, alors $X_i = aY_i$ et ces variables aléatoires Y_i suivent chacune la loi de Cauchy standard, tout en restant mutuellement indépendantes par le lemme des coalitions.

   L'hypothèse de récurrence s'applique donc avec les variables $Y_1, \ldots, Y_k$: leur somme $X = Y_1 + \cdots + Y_k$ suit la loi de Cauchy de paramètre $k \times 1 = k$.

   Le résultat de la question 6.b) peut alors s'appliquer puisque, toujours par le lemme des coalitions Y_{k+1} est indépendante de X et suit la loi de Cauchy standard : $X + Y_{k+1} = Y_1 + \cdots + Y_k + Y_{k+1}$ suit la loi de Cauchy de paramètre $k+1$.

   Mais alors, la fonction de répartition F_{k+1} de $X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1}$ est définie par :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{k+1}(x) &= \mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_k + X_{k+1} \leqslant x) = \mathbf{P}\big(a(Y_1 + \cdots + Y_k + Y_{k+1}) \leqslant x\big) \\ &= \mathbf{P}\big(Y_1 + \cdots + Y_k + Y_{k+1} \leqslant \tfrac{x}{a}\big) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{x/a}{k+1}\Big) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{x}{a(k+1)}\Big) + \frac{1}{2},\end{aligned}$$

   ce qui prouve bien que $X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1}$ suit la loi de Cauchy de paramètre $a(k+1)$, et donc que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

   $\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

Partie 2

8. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

   Dans ce cas, la variable aléatoire $\pi\big(U - \frac{1}{2}\big)$ est à valeurs dans $\big[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\big]$, donc $Y = a \cdot \tan\Big(\pi\big(U - \frac{1}{2}\big)\Big)$ est presque-sûrement bien définie (elle ne l'est pas si U prend la valeur 0 ou la valeur 1, ce qui a une probabilité nulle de se produire), et puisque Arctan est la bijection réciproque de la fonction tan, toutes deux strictement croissantes et continues sur leurs domaines respectifs $\mathbb{R}$ et $\big]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\big[$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Y(x) &= \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}\Big(\tan\Big(\pi\big(U - \tfrac{1}{2}\big)\Big) \leqslant \tfrac{x}{a}\Big) = \mathbf{P}\Big(\pi\big(U - \tfrac{1}{2}\big) \leqslant \mathrm{Arctan}\big(\tfrac{x}{a}\big)\Big) \\ &= \mathbf{P}\Big(U \leqslant \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\big(\tfrac{x}{a}\big) + \tfrac{1}{2}\Big) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\big(\tfrac{x}{a}\big) + \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

   puisque $\dfrac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}\big(\frac{x}{a}\big) + \frac{1}{2}$ appartient à $[0\,;1]$ vu qu'il s'agit de l'expression de la fonction de répartition F de la loi de Cauchy de paramètre a, et vu que $\mathbf{P}(U \leqslant t) = t$ pour tout $t \in [0\,;1]$, par définition de la loi uniforme à densité sur $[0\ 1]$.

   La fonction de répartition de la variable aléatoire Y est donc bien celle d'une loi de Cauchy de paramètre a.

9. De ce qui précède, on déduit (c'est la *méthode d'inversion*) la fonction suivante, qui simule la loi de Cauchy de paramètre a :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def cauchy(a):
    U = rd.random()
    return a*np.tan(np.pi*(U-1/2))
```

Soient n un entier naturel non nul, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X et $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

10. La fonction Python ci-dessous renvoie un vecteur de taille n contenant une réalisation du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$:

```
def realisation(n,a):
    V = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        V[i] = cauchy(a)
    return V
```

11. Dans cette nouvelle fonction Python, on doit prendre garde au fait qu'on réalise ici le calcul des moyennes empiriques d'effectifs croissants :

$$\overline{X}_1 = X_1,\ \overline{X}_2 = \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2), \dots, \overline{X}_{n-1} = \tfrac{1}{n-1}(X_1 + \cdots + X_{n-1}),\ \overline{X_n} = \tfrac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n).$$

```
def moyennes(n,a):
    M = np.zeros(n)
    S = 0
    for i in range(1,n+1):
        S = S + cauchy(a)
        M[i-1] = 1/i*S
    return M
```

On ajoute en effet une simulation d'une nouvelle variable de loi de Cauchy à `S`, et on fait attention au décalage d'indice provoqué par la numérotation à partir du rang 0 des composantes du vecteur `M` qui reçoit ces moyennes empiriques successives.

12. Les trois figures fournies par l'énoncé illustrent une forte variabilité des moyennes empiriques de l'échantillon, même lorsque la taille de celui-ci augmente, au point qu'on reste en peine de pouvoir affirmer la suite d'estimateurs $(\overline{X_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité.

    Il faut dire que puisque la loi de Cauchy n'admet pas d'espérance, la loi faible des grands nombres ne s'applique pas du tout aux moyennes empiriques d'un échantillon de cette loi.

Partie 3

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Cauchy de paramètre réel a strictement positif.

On considère un paramètre réel strictement positif, et l'on pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si } |X_n| \leqslant M, \\ 0 & \text{si } |X_n| > M. \end{cases} \quad \text{et} \quad \overline{Y_n} = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}.$$

13. La variable aléatoire Y_n est clairement une variable de Bernoulli, où :

$$\mathbf{P}(Y_n = 1) = \mathbf{P}\big(|X_n| \leqslant M\big) = \mathbf{P}(-M \leqslant X_n \leqslant M) = F(M) - F(-M).$$

Pour exprimer cette probabilité en fonction de M seulement, il faut remarquer que la densité f est paire, et qu'à ce titre, la fonction F vérifie la propriété suivante :

$$\forall M > 0, \quad F(-M) = \int_{-\infty}^{-M} f(t)\mathrm{d}t = \int_{M}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \mathbf{P}(X_n \geqslant M) \overset{(*)}{=} 1 - \mathbf{P}(X_n \leqslant M) = 1 - F(M)$$

$(*)$ puisque X_n est à densité. Ainsi :

$$\mathbf{P}(Y_n = 1) = 2F(M) - 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y_n = 0) = 1 - \mathbf{P}(Y_n = 1) = 2\big(1 - F(M)\big),$$

soit :

$$\boxed{\mathbf{P}(Y_n = 1) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{M}{a}\Big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{M}{a}\Big)}.$$

14. La suite $(\overline{Y_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est celle des moyennes empiriques d'une suite de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes, de même paramètre $p(a) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{M}{a}\Big)$, qui admettent par conséquent une espérance et une variance : la loi faible des grands nombres (on peut aussi invoquer le théorème d'Or de Bernoulli pour le cas particulier de ces variables) assure alors que $\overline{Y_n}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à $p(a)$.

15. a) Les propriétés connues de l'Arctangente assurent que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 < \mathrm{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$ (la fonction est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc strictement comprise sur $\mathbb{R}_+^*$ entre sa valeur 0 en 0, et sa limite en $+\infty$).

    Ainsi, puisque $M > 0$ et $a > 0$: $\quad 0 < \mathrm{Arctan}\Big(\frac{M}{a}\Big) < \frac{\pi}{2} \iff 0 < \frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\Big(\frac{M}{a}\Big) = p(a) < 1.$

    La deuxième inégalité demandée est un classique ; la fonction $h :\ t \mapsto t(1-t) = -t^2 + t$ est une fonction trinôme du second degré de dérivée $h' :\ t \mapsto 1 - 2t$, positive pour $t \leqslant \frac{1}{2}$ et négative pour $t \geqslant \frac{1}{2}$.

    Cette fonction admet donc un maximum en $t = \frac{1}{2}$ qui vaut $h\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{4}$, de sorte qu'on a bien :

    $$p(a)\big(1 - p(a)\big) = h\big(p(a)\big) \leqslant \frac{1}{4}.$$

    b) On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

    On sait que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante car de dérivée $\Phi' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, et réalise (d'après le théorème éponyme) une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\big]\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x)\big[=]0\,;1[$ qui contient 0.975 : il existe donc un unique réel z tel que $\Phi(z) = 0.975$, et comme $\Phi(0) = \frac{1}{2} < 0.975 = \Phi(z)$, on a bien $0 < z$ par stricte croissance de Φ sur $\mathbb{R}$.

    c) On utilise ici la méthode classique de construction d'un intervalle de confiance de $p(a)$ à partir du Théorème Central Limite : on sait que les $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes identiquement distribuées, de même espérance $p(a)$ et de même variance $p(a)\big(1-p(a)\big) > 0$: le théorème central limite assure alors que la suite $(\overline{Y_n}^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée, réduite, où :

$$\overline{Y_n}^* = \frac{\overline{Y_n} - \mathbf{E}(\overline{Y_n})}{\sigma(\overline{Y_n})}, \text{ avec } \mathbf{E}(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(Y_k) = \frac{1}{n}\times np(a) = p(a) \text{ et } \mathbf{V}(\overline{Y_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{V}(Y_k) = \frac{p(a)\big(1-p(a)\big)}{n}.$$

Le théorème donne ainsi :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big(-z \leqslant \overline{Y_n}^* \leqslant z\big) = \Phi(z) - \Phi(-z) \\
\iff\ &\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(-z \leqslant \sqrt{n}\frac{\overline{Y_n} - p(a)}{\sqrt{p(a)\big(1-p(a)\big)}} \leqslant z\right) = 2\Phi(z) - 1 \qquad \text{car } \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \\
\iff\ &\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(-\frac{z\sqrt{p(a)\big(1-p(a)\big)}}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{Y_n} - p(a) \leqslant \frac{z\sqrt{p(a)\big(1-p(a)\big)}}{\sqrt{n}}\right) = 2\times 0.975 - 1 \\
\iff\ &\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{Y_n} - \frac{z\sqrt{p(a)\big(1-p(a)\big)}}{\sqrt{n}} \leqslant p(a) \leqslant \overline{Y_n} + \frac{z\sqrt{p(a)\big(1-p(a)\big)}}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \\
\iff\ &\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} - \frac{\pi z\sqrt{p(a)\big(1-p(a)\big)}}{2\sqrt{n}} \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\overline{Y_n} + \frac{\pi z\sqrt{p(a)\big(1-p(a)\big)}}{2\sqrt{n}}\right) = 0.95
\end{aligned}$$

Puisque $p(a)\big(1-p(a)\big) \leqslant \frac{1}{4}$, alors $\frac{\pi z\sqrt{p(a)\big(1-p(a)\big)}}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}} \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\overline{Y_n} + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right) \geqslant 0.95,$$

ce qui signifie que $\left[\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}} ; \frac{\pi}{2}\overline{Y_n} + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de $\operatorname{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right)$ au niveau de confiance 95%.

d) La fonction tangente étant strictement croissante et continue sur son domaine $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}} \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{M}{a}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\overline{Y_n} + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right) &= \mathbf{P}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{M}{a} \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\frac{M}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right)} \leqslant a \leqslant \frac{M}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right)}\right)
\end{aligned}$$

L'intervalle de confiance asymptotique de a cherché est donc :

$$\left[\frac{M}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} + \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right)} ; \frac{M}{\tan\left(\frac{\pi}{2}\overline{Y_n} - \frac{\pi z}{4\sqrt{n}}\right)}\right].$$

16. La figure fournie par l'énoncé illustre bien la notion d'intervalle de confiance asymptotique : le paramètre a appartient systématiquement à l'intervalle (il est compris entre ses deux bornes), dont l'amplitude diminue à mesure que la taille de l'échantillon augmente, même si cette amplitude semble converger vers une valeur strictement positive (et pas vers 0, donc).

17. Pour un niveau de confiance exigé, un intervalle de confiance pour un paramètre a doit pouvoir atteindre une amplitude la plus faible possible, et le plus vite possible pour un intervalle de confiance asymptotique, c'est-à-dire pour une taille d'échantillon la plus faible possible. Ces deux qualités s'opposent souvent (si on veut une faible taille d'échantillon, on sera souvent obligé d'accepter un intervalle de confiance de grande amplitude, et si au contraire on veut un intervalle restreint, on devra utiliser un échantillon de grande taille) et on doit généralement trouver un compromis.

 Au vu des graphiques fournis dans cette question (le deuxième est manifestement un "zoom" de la partie droite du premier), il apparaît que c'est lorsque le rapport $\frac{M}{a}$ est égal à 1 que l'on obtient le meilleur intervalle de confiance asymptotique.

★★★ FIN DU SUJET ★★★