Maths ENS B/L 2024

Corrigé proposé par Alban Géron pour Major Prépa

Problème A

1. *(1a)* On a $R_0(\Omega) = [\![1, 5]\!]$.

   Pour tout $k \in [\![1, 4]\!]$, puisque le dé est bien équilibré, la probabilité d'obtention de k est $\frac{1}{6}$.

   D'où $\boxed{P(R_0 = k) = \frac{1}{6}.}$

   De plus, les deux faces numérotées 5 ont également une probabilité d'obtention de $\frac{1}{6}$.

   D'où $\boxed{P(R_0 = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.}$

   (1b) On a $E[R_0] = \sum_{k=1}^{4} k\frac{1}{6} + 5\frac{1}{3} \boxed{= \frac{10}{3}.}$

2. *(2a)* $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $P(X = 1) = P(R_0 = 5) = \frac{1}{3}$ donc $\boxed{X \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{3}.}$

   (2b) D'après le cours, $\boxed{E[X] = \frac{1}{3} \text{ et } V[X] = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}.}$

3. *(3a)* Y est la variable donnant le premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès $\frac{1}{3}$. Donc $\boxed{Y \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{3}.}$

   (3b) D'après le cours, $E[Y] = \frac{1}{\frac{1}{3}} \boxed{= 3}$.

   (3c) D'après le cours, $V[Y] = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \boxed{= 6}$.

4. *(4a)* Soit $i \geq 1$ un entier.
   On a $P(S_i) = P(R_{i-1} = R_i)$.
   Or $(\{R_{i-1} = k\})_{k \in [\![1,5]\!]}$ est une famille complète d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$
\begin{aligned}
P(S_i) &= \sum_{k=1}^{5} P(\{R_{i-1} = R_i\} \cap \{R_{i-1} = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{5} P(\{R_i = k\} \cap \{R_{i-1} = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{5} P(R_i = k)P(R_{i-1} = k) \qquad \text{par indépendance de } R_i \text{ et } R_{i-1}
\end{aligned}
$$

Or R_i et R_{i-1} ont la même loi que R_0. Donc

$$P(S_i) = \sum_{k=0}^{5} (P(R_0 = k))^2 = 4\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \boxed{= \frac{2}{9}}$$

(4b) D'une part, $P(S_1)P(S_2) = \left(\frac{2}{9}\right)^2$.

D'autre part, en appliquant de nouveau la formule des probabilités totales avec la famille complète d'événements $(\{R_0 = k\})_{k\in[\![1,5]\!]}$,

$$\begin{aligned}
P(S_1 \cap S_2) &= P(R_0 = R_1 = R_2) \\
&= \sum_{k=1}^{5} P(\{R_0 = R_1 = R_2\} \cap \{R_0 = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{5} P(\{R_0 = k\} \cap \{R_1 = k\} \cap \{R_2 = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{5} P(R_0 = k)P(R_1 = k)P(R_2 = k) \qquad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{k=1}^{5} (P(R_0 = k))^3 \qquad \text{car } R_1,\ R_2 \text{ et } R_3 \text{ ont la même loi} \\
&= 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\
&= \frac{1}{18} \neq \left(\frac{2}{9}\right)^2
\end{aligned}$$

Donc S_1 et S_2 ne sont pas indépendants. Donc $\boxed{S_1, S_2, S_3, \ldots \text{ ne sont pas indépendants.}}$

(4c) On a

$$P(R_1 = 5 \mid S_2) = \frac{P(S_2 \cap \{R_1 = 5\})}{P(S_2)} = \frac{P(\{R_1 = 5\} \cap \{R_2 = 5\})}{P(S_2)}$$

D'après la question 4a, la question 1a et le fait que R_1 et R_2 sont indépendantes et de même loi que R_0,

$$P(R_1 = 5 \mid S_2) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}} \boxed{= \frac{1}{2}}$$

5. *(5a)* On sait que pour tout entier $i \geq 1$, $S_i = \{R_{i-1} = R_i\}$.

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, $\boxed{Z(\omega) \text{ est le plus petit entier } i \geq 1 \text{ tel que } \omega \in S_i.}$

(5b) L'idée globale est que Z ne peut pas être géométrique car les événements S_i ne sont pas indépendants.

Pour le prouver rigoureusement, raisonnons par l'absurde et supposons que Z suit une loi géométrique.

Il existe donc $p \in]0, 1[$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z = k) = p(1-p)^{k-1}$.

En particulier, $P(Z = 1) = p$. Or $P(Z = 1) = P(S_1) = \frac{2}{9}$, donc $p = \frac{2}{9}$.

De plus, $P(Z = 2) = P(\overline{S_1} \cap S_2)$.

Or par la question 4b, S_1 et S_2 ne sont pas indépendants, donc $\overline{S_1}$ et S_2 ne sont pas indépendants, donc $P(Z=2) \neq P(\overline{S_1})P(S_2)$.

Or $P(\overline{S_1})P(S_2) = \left(1 - \frac{2}{9}\right)\frac{2}{9}$.

D'autre part, comme Z suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{9}$, on a $P(Z=2) = \left(1 - \frac{2}{9}\right)\frac{2}{9}$.

C'est contradictoire.

Par conséquent, $\boxed{Z \text{ ne suit pas une loi géométrique.}}$

6. $(\{B=k\})_{k\in[\![1,6]\!]}$ est une famille complète d'événements donc par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(R_0 = B) &= \sum_{k=1}^{6} P(\{R_0 = B\} \cap \{B = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{6} P(\{R_0 = k\} \cap \{B = k\}) \\
&= \sum_{k=1}^{5} P(\{R_0 = k\} \cap \{B = k\}) \qquad \text{car } R_0(\Omega) = [\![1,5]\!] \\
&= \sum_{k=1}^{5} P(R_0 = k)P(B = k) \qquad \text{car } B \text{ et } R_0 \text{ sont indépendantes} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{5} P(R_0 = k) \\
&\boxed{= \frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

7. De façon analogue, $(\{V=k\})_{k\in\{1,3,5\}}$ est une famille complète d'événements donc par la formule des probabilités totales puis l'indépendance de V et R_0,

$$\begin{aligned}
P(R_0 = V) &= P(\{R_0 = V\} \cap \{V = 1\}) + P(\{R_0 = V\} \cap \{V = 3\}) + P(\{R_0 = V\} \cap \{V = 5\}) \\
&= P(R_0 = 1)P(V = 1) + P(R_0 = 3)P(V = 3) + P(R_0 = 5)P(V = 5) \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} \\
&\boxed{= \frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

8. *(8a)* On a $f(1) = \min\left(\frac{1}{2}, e\right)$, or $1 > 0$ donc $e > 1 > \frac{1}{2}$ donc $\boxed{f(1) = \frac{1}{2}.}$

D'autre part, $\boxed{f(2) = \min(1,1) = 1.}$

Enfin, $f(2+\ln(2)) = \min\left(1 + \frac{\ln(2)}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Or $2 > 1$ donc $\ln(2) > 0$, donc $1 + \frac{\ln(2)}{2} > 1 > \frac{1}{2}$.

D'où $\boxed{f(2+\ln(2)) = \frac{1}{2}.}$

(8b) On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{2} - e^{2-x} \end{array}$

Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2} + e^{2-x} > 0$$

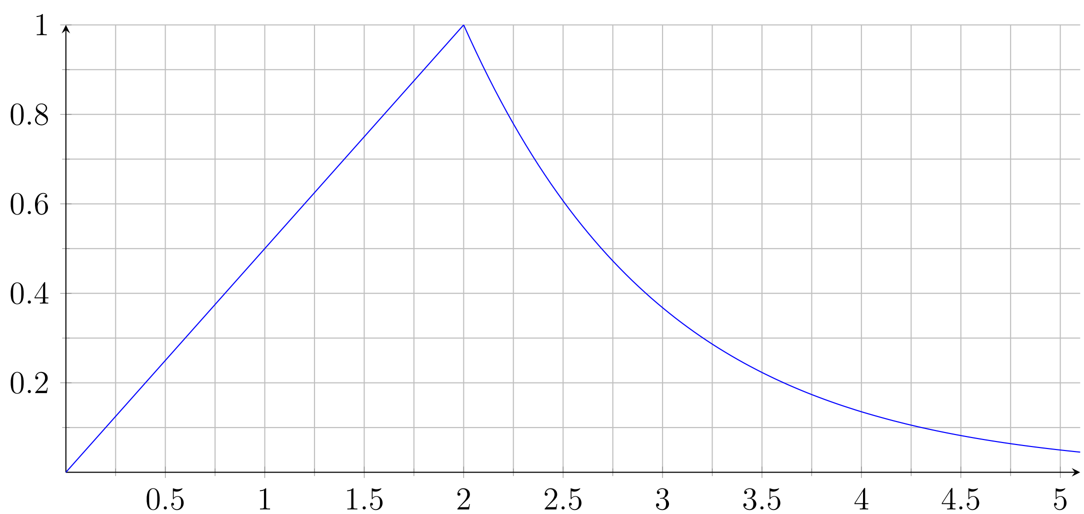
Ainsi φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car elle y est dérivable.
Enfin, $\varphi(1) = -e^2 < 0$ et $\varphi(2+\ln(2)) = \left(1 + \frac{\ln(2)}{2}\right) - \frac{1}{2} > 0$, comme nous l'avons déjà montré à la question précédente.
Par le théorème de la bijection, $\boxed{\text{il existe un unique point } x \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \frac{x}{2} = e^{2-x}.}$

On remarque que $\frac{2}{2} = e^{2-2}$, donc $\boxed{2 \text{ est l'unique solution de } \frac{x}{2} = e^{2-x}.}$

(8c) L'étude de la fonction φ de la question précédente nous permet d'affirmer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \min\left(\frac{x}{2}, e^{2-x}\right) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \leq 2 \\ e^{2-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

On en déduit le graphe de f :[1]



9. *(9a)* Remarquons que puisque λ est positif, λf est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, λf est une densité si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda f(x)dx$ converge et vaut 1.
Or, pour tout $A > 2$,

$$\int_0^A \lambda f(x)dx = \lambda\left(\int_0^2 \frac{x}{2}dx + \int_2^A e^{2-x}dx\right) = \lambda(1 + (-e^{2-A} + 1))$$

Or $\lim_{A\to+\infty} e^{2-A} = 0$ donc $\int_0^{+\infty} \lambda f(x)dx$ converge et vaut 2λ.

Donc $\boxed{\lambda f \text{ est une densité si et seulement si } \lambda = \frac{1}{2}.}$

1. Pour bien tracer la courbe : il est facile de tracer la courbe de f sur $[0,2]$, c'est la même que pour la fonction $x \mapsto x/2$. Pour tracer la courbe de f sur $]2,+\infty[$, remarquer que la courbe de $x \mapsto e^{2-x} = e^{-(x-2)}$ est identique à celle de $x \mapsto e^{-x}$ mais déplacée de 2 unités vers la droite.

(9b) On a
$$P(N>2)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2}f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{2}e^{2-x}dx=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}(-e^{2-A}+1)\boxed{=\frac{1}{2}}$$

(9c) Soit $x\in\mathbb{R}_+$.
$$P(N>x+2\mid N>2)=\frac{P(\{N>x+2\}\cap\{N>2\})}{P(N>2)}=2P(\{N>x+2\}\cap\{N>2\})$$

Or, puisque x est positif, $\{N>x+2\}\subset\{N>2\}$.
On en déduit que $\{N>x+2\}\cap\{N>2\}=\{N>x+2\}$.
D'où
$$P(N>x+2\mid N>2)=2P(N>x+2)=2\int_{x+2}^{+\infty}\frac{1}{2}f(t)dt=\int_{x+2}^{+\infty}e^{2-t}dt=e^{2-(x+2)}\boxed{=e^{-x}}$$

(9d) Soit $A>2$.
$$\int_0^A x\frac{1}{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2\frac{x^2}{2}dx+\int_2^A xe^{2-x}dx\right)$$
Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto -e^{2-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2,A]$ donc on peut intégrer par parties.
$$\int_0^A x\frac{1}{2}f(x)dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left([-xe^{2-x}]_2^A+\int_2^A e^{2-x}dx\right)=\frac{1}{3}+\frac{-Ae^{2-A}+2}{2}+1-e^{2-A}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty}(-Ae^{2-A})=0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\frac{1}{2}f(x)dx$ converge et vaut $\dfrac{4}{3}$.

Par conséquent, $\boxed{N \text{ admet une espérance finie et } E[N]=\frac{4}{3}.}$

10.(10a) On cherche $b>0$ tel que D et V aient la même loi.

Pour cela, il est nécessaire que $P(b\le N)=P(V=5)$, c'est-à-dire, $P(N>b)=\dfrac{1}{2}$.

D'une part, d'après la question 9b, on sait que $P(N>2)=\dfrac{1}{2}$.
D'autre part, notons F la fonction de répartition de N. Alors F est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (car f est strictement positive sur $]0,+\infty[$), et on a $F(0)=P(N\le 0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $b>0$ tel que $F(b)=\dfrac{1}{2}$.

On a alors $P(N>b)=1-F(b)=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, par unicité, $\boxed{b=2.}$

(10b) On cherche $a>0$ tel que D et V aient la même loi.

Pour cela, il est nécessaire que $P(0\le N<a)=P(V=1)$, c'est-à-dire, $P(N\le a)=\dfrac{1}{3}$.
Par le même raisonnement qu'à la question précédente, il existe un unique $a>0$ tel que $P(N\le a)=\dfrac{1}{3}$.

La fonction de répartition de N est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, et $P(N\le 2)=\dfrac{1}{2}$, d'où $a<2$.

On a

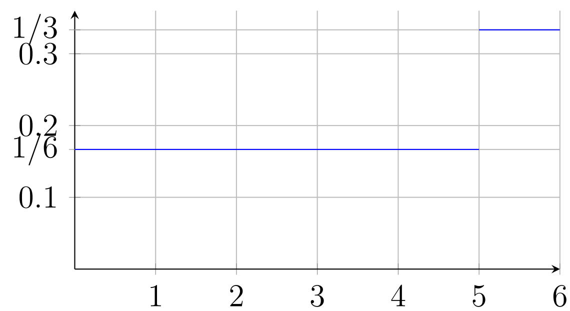
$$\begin{aligned} P(N \leq a) &= \int_0^a \frac{1}{2} f(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x^2}{2}dx \qquad \text{car } a < 2 \\ &= \frac{a^3}{12} \end{aligned}$$

Ainsi, $P(N \leq a) = \dfrac{1}{3}$ si et seulement si $\boxed{a = 4^{1/3}.}$

11. On cherche une densité g telle que pour tout $k \in [\![1,5]\!]$, $P([G] = k) = P(R_0 = k)$.

C'est équivalent à dire que $P(k \leq G < k+1) = P(R_0 = k)$, c'est-à-dire, $\displaystyle\int_k^{k+1} g(x)dx = P(R_0 = k)$.

Au brouillon, il faut pouvoir visualiser rapidement que si g possède le graphe suivant, alors pour tout $k \in [\![1,5]\!]$, $\int_k^{k+1} g(x)dx = P(R_0 = k)$:



On pose $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1/6 & \text{si } x \in [0,5[\\ 1/3 & \text{si } x \in [5,6[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

Alors pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, $\displaystyle\int_k^{k+1} g(x)dx = \frac{1}{6} = P(R_0 = k)$ et $\displaystyle\int_5^6 g(x)dx = \frac{1}{3} = P(R_0 = 5)$.

D'où $\displaystyle\int_k^{k+1} g(x)dx = P(R_0 = k)$ pour tout $k \in [\![1,5]\!]$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } G \text{ a pour densité } g\text{, alors } [G] \text{ et } R_0 \text{ ont la même loi.}}$

Problème B

12.(12a) On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$.

La fonction exponentielle étant continue en 0, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$.

D'où $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$

(12b) On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\infty$.

La fonction exponentielle étant continue en 0, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

D'où $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0.}$

(12c) Reformulons la question posée. On nous demande si l'équation $g(x) = x$ admet une solution.

Or $g(x) = x$ équivaut à $e^{-\frac{1}{x}} = 0$, qui n'a pas de solution car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\text{le graphe de } g \text{ n'intersecte pas la droite d'équation } y = x.}$

13.(13a) On a $\boxed{\lim_{t \to 0^+} h(t) = -\infty.}$

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $h(t) = t\left(\frac{\ln(t)}{t} - 1\right)$.

Or par croissances comparées, $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$.

D'où $\boxed{\lim_{t \to +\infty} h(t) = -\infty.}$

(13b) Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto -t$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par somme, h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $\boxed{t \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(t) = \frac{1}{t} - 1.}$

(13c) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a $h'(t) > 0$ si et seulement si $t < 1$.

Donc h est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

t	0		1		$+\infty$
h	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

(13d) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après le tableau de variation précédent, on sait que $\ln(t) - t < -1$.

D'où $\ln(t) - t + \ln(2) < -1 + \ln(2)$, c'est-à-dire, $\ln(2t) - t < -1 + \ln(2)$.

Or $\ln(2) < 1$. Ainsi, $\ln(2t) - t < 0$ et donc $\boxed{\ln(2t) < t.}$

(13e) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la question précédente, $\ln\left(\frac{2}{x}\right) < \frac{1}{x}$, d'où $\ln\left(\frac{x}{2}\right) > -\frac{1}{x}$.

Par conséquent, $\frac{x}{2} > e^{-\frac{1}{x}}$, et donc $\boxed{g(x) > 0.}$

14.(14a) Pour monter que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, il faut et il suffit que l'on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est non nul.[2]

Montrons pour cela par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Par hypothèse, $u_0 > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = g(u_n) > 0$ d'après la question précédente.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Donc $\boxed{u_n \text{ est bien défini pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

(14b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -2e^{-\frac{1}{u_n}} < 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, $u_0 > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = g(u_{n-1}) > 0$ par 13e. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

2. En effet, si $u_n = 0$, alors la définition de u_{n+1} n'a pas de sens car on a une division par zéro !

Par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \ell \geq 0.}$

(14c) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell > 0$.
Alors $\ell = g(\ell)$, donc l'équation $g(x) = x$ admet une solution dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui contredit le résultat de la question 12c.
Donc $\ell = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

15.*(15a)* Lorsque s tend vers 0, on a $(1-s)^{-\alpha} = 1 + (-\alpha)(-s) + o(s) \boxed{= 1 + \alpha s + o(s).}$

(15b) On a $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$ et $u_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'où $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{u_k} = +\infty$.

Or $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ par croissances comparées, donc $\boxed{\lim_{k\to+\infty} 2u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}} = 0.}$

(15c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} = \left(u_k - 2e^{-\frac{1}{u_k}}\right)^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} = u_k^{-\alpha}\left(\left(1 - 2u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}}\right)^{-\alpha} - 1\right)$$

D'après 15b, $\lim_{k\to+\infty} 2u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}} = 0$, donc d'après le développement limité de 15a, lorsque k tend vers $+\infty$ on a

$$\begin{aligned}
u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha} &= u_k^{-\alpha}\left(1 + \alpha\left(2u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}}\right) - 1 + o\left(u_k^{-1}e^{-\frac{1}{u_k}}\right)\right) \\
&= 2\alpha u_k^{-\alpha-1}e^{-\frac{1}{u_k}} + o\left(u_k^{-\alpha-1}e^{-\frac{1}{u_k}}\right) \\
&= (2\alpha + \varepsilon_k)u_k^{-\alpha-1}e^{-\frac{1}{u_k}}
\end{aligned}$$

où $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0. [3]

Or par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1}e^{-x} = 0$, donc $\lim_{k\to+\infty} u_k^{-\alpha-1}e^{-\frac{1}{u_k}} = 0$.

Par conséquent, $\boxed{\lim_{k\to+\infty}(u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha}) = 0.}$

(15d) Puisque $\lim_{k\to+\infty}(u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha}) = 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq p$, $|u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha}| \leq \varepsilon$.
On a alors, par inégalité triangulaire, pour tout $n \geq p$,

$$\begin{aligned}
|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| &= |u_n^{-\alpha} - u_p^{-\alpha} + u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \\
&\leq |u_n^{-\alpha} - u_p^{-\alpha}| + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| = \left|\sum_{k=p}^{n-1}(u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha})\right| + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \\
&\leq \sum_{k=p}^{n-1}|u_{k+1}^{-\alpha} - u_k^{-\alpha}| + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \\
&\leq (n-p)\varepsilon + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|
\end{aligned}$$

De plus, puisque $\lim_{n\to+\infty} n\varepsilon = +\infty$, il existe [4] $p' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p'$, $|u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq n\varepsilon$.
Posons $q = \max(p, p')$. Alors, pour tout $n \geq q$:

$$|u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } n\geq p}}{\leq} (n-p)\varepsilon + |u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } n\geq p'}}{\leq} (n-p)\varepsilon + n\varepsilon \boxed{\leq 2\varepsilon n}$$

3. Par définition, $o(v_n)$ signifie en réalité $\varepsilon_n v_n$ où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0.
4. Ici, $|u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}|$ est une constante ! ainsi, à partir d'un certain rang noté p', pour $n \geq p'$, $|u_p^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}| \leq n\varepsilon$.

(15e) La question précédente nous permet d'écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists q \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq q, \quad \left| \frac{u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}}{2n} \right| \leq \varepsilon$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}}{2n} = 0$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_n^{-\alpha}}{n} = 2\dfrac{u_n^{-\alpha} - u_0^{-\alpha}}{2n} + \dfrac{u_0^{-\alpha}}{n}$ et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_0^{-\alpha}}{n} = 0$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n^{-\alpha}}{n} = 0.}$

(15f) On déduit de la question précédente que pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n^x = +\infty$.

Donc en prenant $x = \dfrac{1}{\alpha}$ on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n^{\frac{1}{\alpha}} = +\infty$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^\alpha u_n = \left(n u_n^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = +\infty.}$

16.*(16a)* Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On a $\boxed{\partial_1 F(x, y) = 1 - \dfrac{y e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \text{ et } \partial_2 F(x, y) = -e^{-\frac{1}{x}}.}$

(16b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\partial_2 F(x, y) \neq 0$.
Donc F n'admet pas de point critique.
Donc $\boxed{F \text{ n'admet pas d'extremum local.}}$

17.*(17a)* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} F(x, y) = 0 &\iff \frac{x}{y} = e^{-\frac{1}{x}} \\ &\iff \ln(x) - \ln(y) = -\frac{1}{x} \\ &\boxed{\iff h(t) = r, \text{ où } t = \frac{1}{x} \text{ et } r = -\ln(y)} \end{aligned}$$

(17b) Puisque h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, étant donné le tableau de variations établi en 13c :

- Si $r > -1$: alors $h(t) = r$ n'admet pas de solution.
- Si $r = -1$: alors $h(t) = r$ admet une unique solution.
- Si $r < -1$: alors $h(t) = r$ admet exactement deux solutions.

(17c) D'après 17a, puisque $r = -\ln(y)$ et puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ réalise une bijection [5] de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit :

- Si $y < e$: alors $F(x, y) = 0$ n'admet pas de solution.
- Si $y = e$: alors $F(x, y) = 0$ admet une unique solution.
- Si $y > e$: alors $F(x, y) = 0$ admet exactement deux solutions.

5. Quand on fait un changement de variable dans une équation, pour pouvoir affirmer que le nombre de solutions pour t et le nombre de solutions pour x est le même il faut que le changement soit bijectif.
Par exemple, si on veut résoudre $(x^2 - 1)^2 = 0$ et qu'on pose $t = x^2$, il est clair que le nombre de solutions de $(t - 1)^2 = 0$ n'est pas le même que le nombre de solutions de $(x^2 - 1)^2 = 0$...

Problème C

18.(18a) Soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\rho\Big(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\Big) &= \rho\Big(\lambda x_1 + x_2,\ \lambda y_1 + y_2,\ \lambda z_1 + z_2\Big) \\
&= (-\lambda y_1 - y_2,\ \lambda z_1 + z_2,\ -\lambda x_1 - x_2) \\
&= \lambda(-y_1, z_1, -x_1) + (-y_2, z_2, -x_2) \\
&= \lambda\rho(x_1, y_1, z_1) + \rho(x_2, y_2, z_2)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\rho \text{ est linéaire.}}$

On a $\rho(1, 0, 0) = (0, 0, -1)$, $\rho(0, 1, 0) = (-1, 0, 0)$ et $\rho(0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

D'où $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$

(18b) On a $A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{= I_3.}$ On en déduit que $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

19.(19a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\rho(x, y, z) = 1(x, y, z) &\iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \\
&\iff -x = y = z
\end{aligned}$$

Prenons par exemple $v_1 = (1, -1, -1)$. Alors v_1 est non nul et vérifie l'égalité ci-dessus, c'est donc un vecteur propre de ρ associé à la valeur propre 1.

Ainsi, $\boxed{v_1 = (1, -1, -1) \text{ convient.}}$

(19b) On calcule : $\langle v_1, v_2 \rangle = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times (-1) \boxed{= 0.}$

(19c) Déterminons v_3 par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $v_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\langle v_3, v_2 \rangle = 0$, $\langle v_3, v_1 \rangle = 0$ et $\|v_3\| = \|v_2\|$.
Les deux premières conditions se réécrivent :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{donc :} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Ainsi $v_3 = y(0, 1, -1)$.
Enfin, $\|v_3\| = \|v_2\|$ donc $\|v_3\|^2 = \|v_2\|^2$ donc $2y^2 = 6$, d'où $y = \sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}$.
Donc $v_3 = \sqrt{3}(0, 1, -1)$ ou $v_3 = -\sqrt{3}(0, 1, -1)$

Synthèse. Vérifions que si $v_3 = \sqrt{3}(0, 1, -1)$ ou $v_3 = -\sqrt{3}(0, 1, -1)$, alors on a $\langle v_3, v_2 \rangle = 0$, $\langle v_3, v_1 \rangle = 0$ et $\|v_3\| = \|v_2\|$.
On a $\langle (0, 1, -1), v_2 \rangle = 0 + 1 - 1 = 0$ et $\langle (0, 1, -1), v_1 \rangle = -1 + 1 = 0$.
Donc par linéarité à gauche du produit scalaire, si $v_3 = \sqrt{3}(0, 1, -1)$ ou $v_3 = -\sqrt{3}(0, 1, -1)$, alors on a $\langle v_3, v_2 \rangle = 0$ et $\langle v_3, v_1 \rangle = 0$.

Enfin, $\|(0,1,-1)\| = \sqrt{2}$, donc $\|\sqrt{3}(0,1,-1)\| = \sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6} = \|v_2\|$, et d'autre part on a $\|-\sqrt{3}(0,1,-1)\| = |-1|\|\sqrt{3}(0,1,-1)\| = \|v_2\|$.

On a trouvé toutes les valeurs possibles de v_3. L'énoncé ne nous en demande qu'une seule (« *déterminer un vecteur* »), donc on peut par exemple répondre que $\boxed{v_3 = \sqrt{3}(0,1,-1) \text{ convient.}}$

(19d) Les questions 19a, 19b et 19c montrent que la famille (v_1, v_2, v_3) est orthogonale.

Puisque v_1, v_2 et v_3 sont non nuls, la famille (v_1, v_2, v_3) est donc libre.

Enfin, (v_1, v_2, v_3) est de cardinal 3, et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

(19e) Tout d'abord, $\rho(v_2) = (-1, 1, -2)$ et $\rho(v_3) = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$.

Ensuite, fixons $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

On résout les deux systèmes :

$$\rho(v_2) = \alpha v_2 + \beta v_3 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha & = & -1 \\ \alpha + \beta\sqrt{3} & = & 1 \\ \alpha - \beta\sqrt{3} & = & -2 \end{array}\right. \iff \boxed{\alpha = -\frac{1}{2} \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rho(v_3) = \gamma v_2 + \delta v_3 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\gamma & = & -\sqrt{3} \\ \gamma + \delta\sqrt{3} & = & -\sqrt{3} \\ \gamma - \delta\sqrt{3} & = & 0 \end{array}\right. \iff \boxed{\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \delta = -\frac{1}{2}}$$

(19f) On vient d'exprimer $\rho(v_2)$ et $\rho(v_3)$ en fonction de v_2 et v_3.

De plus, v_1 est un vecteur propre de ρ associé à la valeur propre 1 donc $\rho(v_1) = v_1$.

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$.

(19g) On a $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boxed{\theta = -\frac{2\pi}{3} \text{ convient.}}$

20.*(20a)* On sait que -1 n'est pas valeur propre de C, donc $C + I_3$ est inversible.

Donc il existe $Q \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $(C + I_3)Q = I_3$.

En transposant, on obtient $Q^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}} + I_3) = I_3$.

Donc $\boxed{C^{\mathrm{T}} + I_3 \text{ est inversible.}}$

(20b) On a $(C^{\mathrm{T}} + I_3)(C - I_3) = C^{\mathrm{T}}C - C^{\mathrm{T}} + C - I_3$.

Puisque $C^{\mathrm{T}}C = I_3$, on en déduit $\boxed{(C^{\mathrm{T}} + I_3)(C - I_3) = C - C^{\mathrm{T}}.}$

(20c) On pose $C - C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} u & a & b \\ v & w & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$.

On a

$$(C - C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}} - (C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = -(C - C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$$

Avec des mots (hors programme) : on vient de prouver que $C - C^{\mathrm{T}}$ est antisymétrique.

Donc $\begin{pmatrix} u & a & b \\ v & w & c \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u & -v & -x \\ -a & -w & -y \\ -b & -c & -z \end{pmatrix}$, d'où $u = w = z = 0$; $v = -a$; $x = -b$ et $y = -c$.

Ainsi, $\boxed{C - C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}}$.

(20d) Posons $A = C - C^{\mathrm{T}}$ et reformulons la question posée. On nous demande de montrer que A n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde et supposons que A est inversible.

On a $I_3 = AA^{-1}$ donc en transposant : $I_3 = (A^{-1})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Or $A^{\mathrm{T}} = -A$ d'après la question précédente, d'où $I_3 = -(A^{-1})^{\mathrm{T}} A$.

Ainsi $-(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ est l'inverse de A, d'où $A^{-1} = -(A^{-1})^{\mathrm{T}}$, c'est-à-dire,

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}} = -A^{-1}$$

Avec des mots (hors programme) : on vient de prouver que A^{-1} est antisymétrique.

En raisonnant exactement comme à la question précédente, on en déduit que A^{-1} peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } (d, e, f) \in \mathbb{R}^3$$

De plus, on a $AA^{-1} = I_3$, donc :

$$\begin{pmatrix} -ad - be & -bf & af \\ -ce & -ad - cf & -ae \\ -cd & -bd & -be - cf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $-ce = 0$; $-cd = 0$ et $-ae = 0$.

Par conséquent :

- Si $c \neq 0$: puisque $ce = 0$ et $cd = 0$, nécessairement $e = 0$ et $d = 0$.
  Donc $-ad - be = 0$, ce qui contredit le fait que $-ad - be = 1$.
- Si $c = 0$: puisque $-ad - cf = 1$ et $-be - cf = 1$, nécessairement $-ad = 1$ et $-be = 1$.
  Donc a, d, b et e sont non nuls.
  Cela contredit le fait que $-ae = 0$.

Conclusion : A n'est pas inversible.

En d'autres termes, $\boxed{\text{le noyau de l'application représentée par } C - C^{\mathrm{T}} \text{ est non nul.}}$

(20e) On pose $M = C^{\mathrm{T}} + I_3$, $N = C - I_3$ et $A = C - C^{\mathrm{T}}$.

D'après 20a, M est inversible ; d'après 20b, $MN = A$ et d'après 20d, A n'est pas inversible.

Raisonnons par l'absurde et supposons que N est inversible.

Alors on a $MN(N^{-1}M^{-1}) = I_3$, donc MN est inversible. Or $MN = A$ et A n'est pas inversible, c'est absurde.

Donc N n'est pas inversible.

Autrement dit, $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } C.}$

21. Distinguons deux cas :

- Si $-1 \notin S(C)$: par 20e on a $1 \in S(C)$.
- Si $-1 \in S(C)$: $C + I_3$ n'est donc pas inversible.

Donc $-C - I_3 = -(C + I_3)$ n'est pas inversible.[6]

Ainsi, 1 est valeur propre de $-C$, c'est-à-dire $1 \in S(-C)$.

6. Une matrice est inversible si et seulement si son opposé l'est.

Par conséquent, $\boxed{1 \in (S(C)) \cup (S(-C)).}$

22.(22a) On a $(H_V)^{\mathrm{T}} = 2\dfrac{(VV^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}{\|V\|^2} - I_3^{\mathrm{T}} = 2\dfrac{VV^{\mathrm{T}}}{\|V\|^2} - I_3 \boxed{= H_V.}$

D'autre part, $H_V V = \dfrac{2}{\|V\|^2}V(V^{\mathrm{T}}V) - V = \dfrac{2}{\|V\|^2}\|V\|^2V - V \boxed{= V.}$

Enfin, puisque $(H_V)^{\mathrm{T}} = H_V$, on a $(H_V)^{\mathrm{T}}H_V = H_V^2$. Or,

$$\begin{aligned} H_V^2 &= \frac{4}{\|V\|^4}V(V^{\mathrm{T}}V)V^{\mathrm{T}} - \frac{4}{\|V\|^2}VV^{\mathrm{T}} + I_3 \\ &= \frac{4}{\|V\|^4}\|V\|^2VV^{\mathrm{T}} - \frac{4}{\|V\|^2}VV^{\mathrm{T}} + I_3 \\ &= I_3 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(H_V)^{\mathrm{T}}H_V = I_3.}$

(22b) Supposons que $H_VX = Y$. On vient de montrer que $H_V^2 = I_3$, donc en multipliant par H_V à gauche on obtient $X = H_VY$.

Réciproquement, en échangeant les rôles de X et Y dans le raisonnement ci-dessus, on obtient : si $H_VY = X$, alors $Y = H_VX$.

Bilan : $\boxed{H_VX = Y \text{ si et seulement si } H_VY = X.}$

23.(23a) On a

$$\begin{aligned} H_{X+Y}X &= \frac{2}{\|X+Y\|^2}(X+Y)(X+Y)^{\mathrm{T}}X - X \\ &= \frac{2}{\|X+Y\|^2}(XX^{\mathrm{T}} + YX^{\mathrm{T}} + YY^{\mathrm{T}} + XY^{\mathrm{T}})X - X \\ &= \frac{2}{\|X+Y\|^2}(\|X\|^2X + \|X\|^2Y + YY^{\mathrm{T}}X + XY^{\mathrm{T}}X) - X \end{aligned}$$

Or, d'une part $\|X\| = \|Y\| = 1$ et $Y^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}Y$, d'où

$$H_{X+Y}X = \frac{2(1 + X^{\mathrm{T}}Y)}{\|X+Y\|^2}(X+Y) - X$$

D'autre part, $\|X+Y\|^2 = X^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X + Y^{\mathrm{T}}Y = 2(1 + X^{\mathrm{T}}Y)$.

Donc $H_{X+Y}X = (X+Y) - X$, c'est-à-dire, $\boxed{H_{X+Y}X = Y.}$

(23b) On pose $Z = V + e_1$.

On a $M^{\mathrm{T}}M = H_Z^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}H_Z^{\mathrm{T}}H_ZRH_Z$.

Or d'après 22a, $(H_Z)^{\mathrm{T}}H_Z = I_3$ donc $M^{\mathrm{T}}M = H_Z^{\mathrm{T}}R^{\mathrm{T}}RH_Z$.

On calcule $R^{\mathrm{T}}R$:

$$\begin{aligned} R^{\mathrm{T}}R &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tau) & -\sin(\tau) \\ 0 & \sin(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tau) & \sin(\tau) \\ 0 & -\sin(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\tau) + \sin^2(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2(\tau) + \cos^2(\tau) \end{pmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

Ainsi, $M^{\mathrm{T}}M = (H_Z)^{\mathrm{T}}H_Z$ donc selon 22a, $\boxed{M^{\mathrm{T}}M = I_3.}$

On a $MV = H_{V+e_1}R(H_{V+e_1}V) = H_{V+e_1}Re_1$ par 23a.

On remarque que

$$Re_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tau) & \sin(\tau) \\ 0 & -\sin(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

Donc $M_V = H_{V+e_1}e_1 = V$ par 23a.

Puisque V est non nul (car $\|V\| \neq 0$), $\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } M.}$

24.(24a) Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\langle x, u\rangle = 0$.

Alors, par définition de φ, on a $\langle \varphi(x), \varphi(u)\rangle = 0$.

Enfin, $u \in E_1$ donc $\varphi(u) = u$. Ainsi $\boxed{\langle \varphi(x), u\rangle = 0.}$

(24b) Soit $y \in \varphi(E_1^\perp)$. Montrons que $y \in E_1^\perp$.

Il existe $x \in E_1^\perp$ tel que $y = \varphi(x)$.

Soit $z \in E_1$. Montrons que $\langle y, z\rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \langle y, z\rangle &= \langle \varphi(x), z\rangle \\ &= \langle \varphi(x), \varphi(z)\rangle \qquad \text{car } z \in E_1 \\ &= \langle x, z\rangle \\ &= 0 \qquad \text{car } x \in E_1^\perp \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in E_1$, $\langle y, z\rangle = 0$, donc $y \in E_1^\perp$.

D'où $\boxed{\varphi(E_1^\perp) \subset E_1^\perp.}$

(24c) On sait que $u \in E_1$, donc $\varphi(u) = u$, et donc $\boxed{n_{11} = 1 \text{ et } n_{21} = n_{31} = 0.}$

De plus, on a

$$\langle u, v\rangle = \langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle = \Big\langle u,\ n_{12}u + n_{22}v + n_{32}w \Big\rangle = n_{12}\langle u, u\rangle + n_{22}\langle u, v\rangle + n_{32}\langle u, w\rangle$$

Puisque (u, v, w) est orthonormée, on en déduit que $\langle u, v\rangle = n_{12}$. Mais on sait d'autre part que $\langle u, v\rangle = 0$ pour la même raison.

D'où $\boxed{n_{12} = 0.}$

Le fait que (u, v, w) est orthonormée entraîne de même $\boxed{n_{13} = 0.}$

(24d) On pose $\begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = (p_{i,j})_{(i,j)\in\{1,2\}^2}$.

Fixons $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ et calculons $p_{i,j}$.

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= n_{2,i+1}n_{2,j+1} + n_{3,i+1}n_{k,j+1} \\ &= n_{1,i+1}n_{1,j+1} + n_{2,i+1}n_{2,j+1} + n_{3,i+1}n_{k,j+1} \qquad \text{car } n_{12} = n_{13} = 0 \\ &= \begin{cases} \langle v, w\rangle & \text{si } i \neq j \\ \|v\|^2 & \text{si } i = j = 1 \\ \|w\|^2 & \text{si } i = j = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque (u, v, w) est orthonormée, si $i \neq j$, $p_{i,j} = 0$ et si $i = j$, $p_{i,j} = 1$.

Autrement dit, $\boxed{\begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} n_{22} & n_{23} \\ n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = I_2.}$