(1) $\boxed{A = D + N}$.

(2)
$$\begin{array}{c|c} \times & N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & DN = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c|c} \times & D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & ND = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc $\boxed{DN = N}$ et $\boxed{ND = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$. $ND \neq DN$ donc $\boxed{N \text{ et } D \text{ ne commutent pas}}$.

Première méthode

(3) $\boxed{a_4 = a_3 - 1 = a_2 - 1 - 1 = a_1 - 1 - 1 - 1 = -4}$.

(4) $\boxed{c_3 = c_2 + 2^2 = c_1 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7}$.

(5) $\boxed{b_2 = b_1 - c_1 = 0 - 1 = -1 \text{ et } b_3 = b_2 - c_2 = -1 - 3 = -4}$.

(6) Cette suite est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $a_1 = -1$, donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, a_n = a_1 + (n-1) \times (-1) = -n}$.

(7) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1}$

alors, pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \; - \; 2^0 = 2^n - 2}$.

(8) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k)$ est une somme télescopique donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = c_{n-1+1} - c_1 = c_n - c_1}$

Rappel : $\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = c_n \underbrace{-c_{n-1} + c_{n-1}}_{=0} \underbrace{-c_{n-2} + \; .}_{=0} \; . \; \underbrace{. + c_3}_{=0} \underbrace{-c_2 + c_2}_{=0} - c_1 = c_n - c_1$.

(9) Or $c_{k+1} - c_k = 2^k$, donc $\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 2$.

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $c_n - c_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = 2^n - 2 \Leftrightarrow c_n = 2^n - 2 + c_1 \Leftrightarrow \boxed{c_n = 2^n - 1}$.

(10) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, \mathcal{H}_n : \; b_n = (n+1) - 2^n$.

<u>Initialisation :</u> $n = 1$, $b_1 = 0$ et $(1+1) - 2^1 = 0$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbf{N}^*$ supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et vérifions que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie .
Or $b_{n+1} = b_n - c_n \underset{\mathcal{H}_n}{=} (n+1) - 2^n - 2^n + 1 = (n+1+1) - 2 \times 2^n = (n+1+1) - 2^{n+1}$
donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> On a montré par le principe de récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, b_n = (n+1) - 2^n}$