Code sujet : 297

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC BS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GENERALE

Lundi 29 avril 2024, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la bibliothèque `numpy` de `Python` est importée avec `import numpy as np` et que la librairie `numpy.random` de `Python` est importée grâce à la commande `import numpy.random as rd`.

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1) a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Vérifier que le vecteur V_n, élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est un vecteur propre de J_n.

c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

Tournez la page S.V.P.

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall\ x=(x_1, x_2, ..., x_n)\in\mathbb{R}^n,\ f_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2$$

2) Montrer que f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

3) a) Déterminer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ et pour tout $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'expression de $\partial_i f_n(x)$ en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$ et de n.

b) En déduire que les points critiques de f_n sont les points de la forme $(a,a,...,a)\in\mathbb{R}^n$.

4) a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.

b) Vérifier que la hessienne de f_n en chaque point critique est $\nabla^2 f_n(a,a,...,a)=\frac{2}{n^2}(nI_n-J_n)$.

c) Compléter les commandes Python suivantes afin qu'elles permettent de calculer et d'afficher $\nabla^2 f_n(a,a,...,a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('entrez la valeur de n:'))
I=---
J=---
Hessienne=---
print(Hessienne)
```

d) À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $\nabla^2 f_n(a,a,...,a)$ et expliquer pourquoi cette méthode ne permet pas de savoir si f_n possède un extremum local.

5) a) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

$$\forall\ (x_1, x_2, ..., x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\leq n\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

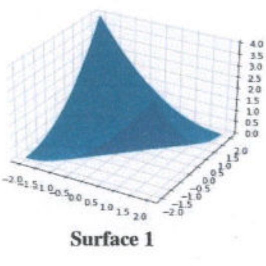
b) En déduire que f_n admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et que ce minimum est atteint en chaque point critique de f_n.

6) Étude du cas $n=2$.

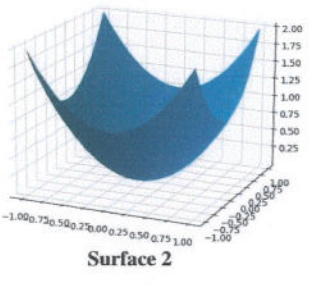
a) Compléter la deuxième ligne de la fonction Python suivante afin de définir la fonction f_2.

```
def f_2(x,y):
    z=------
    return z
```

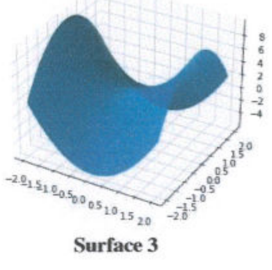
b) Certaines commandes Python utilisant la fonction précédente permettent de tracer la surface représentant f_2. Laquelle est-ce ? Justifier la réponse.



Surface 1



Surface 2



Surface 3

Exercice 2

1) Question préliminaire. On rappelle que la fonction arctangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'expression, pour tout réel x, de $\text{Arctan}'(x)$.

b) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

c) Justifier l'équivalent suivant :

$$\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$$

2) On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}$$

a) Vérifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

b) Montrer que f peut être considérée comme une densité.

Dans la suite, on s'intéresse à une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P), admettant f pour densité.

3) Montrer que la fonction de répartition F de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}(e^x)$$

4) Simulation.

On pose $U = F(X)$ et on admet que U est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

b) Reconnaître la loi de U.

c) Déterminer $F^{-1}(x)$ pour tout x de $]0,1[$ puis, en admettant que la commande `np.tan(y)` renvoie la valeur de la fonction tangente en y, écrire un script `Python` permettant de simuler X.

5) a) Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

b) Montrer que X^2 admet une espérance.

6) Dans cette question, on se propose de déterminer la variance de X.

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t + e^{-t}}\,dt$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt = \frac{2}{n^3}$.

b) Pour tout entier naturel p, établir l'égalité:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t}\,dt = I + (-1)^p \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt$$

c) Montrer, par encadrement, que :

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2p+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt = 0$$

Tournez la page S.V.P.

d) Déduire des questions précédentes l'expression de $V(X)$ sous forme d'une somme de série.

En admettant que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$, donner la valeur de $V(X)$.

7) On pose $Y = e^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Déterminer explicitement la fonction de répartition G de Y puis en déduire que Y est une variable aléatoire à densité.

b) On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, toutes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant la même loi que Y.

On pose $M_n = \max(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que la fonction de répartition G_n de M_n est définie par :

$$G_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\text{Arctan}(x)\right)^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

c) Utiliser la question 1) pour montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{n}{M_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 3

Dans cet exercice, E est un espace euclidien tel que $\dim E \geq 2$ et p désigne un entier naturel non nul et strictement inférieur à $\dim E$.

Le produit scalaire des vecteurs a et b de E est noté $\langle a, b\rangle$ et la norme du vecteur a est notée $\| a \|$.

On considère p réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tous différents de 0, ainsi qu'une famille orthonormale $(u_1, ..., u_p)$ de p vecteurs de E, et enfin on pose $U = \text{Vect}(u_1, ..., u_p)$.

On se propose d'étudier l'application f qui, à tout vecteur x de E, associe :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle u_i, x\rangle u_i$$

Partie 1 : étude de f

1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

2) Caractériser f lorsque $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont tous égaux à 1.

On revient au cas général pour toute la suite.

3) a) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et préciser sa dimension en fonction de $\dim E$ et p.

b) En déduire le rang de f puis déterminer $\text{Im}(f)$.

4) Montrer que les réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont valeurs propres de f et donner un vecteur propre associé à chacune d'entre elles.

Partie 2 : convergence d'une suite de vecteurs de E

5) On dit qu'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers le vecteur y de E lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \| y_n - y \| = 0$. Montrer que le vecteur y est unique.

On pose $K = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2}$ et on suppose que K est strictement inférieur à 1.

6) Calculer $\| f(x) \|^2$ pour tout x de E et en déduire que l'on a $\| f(x) \| \leq K \| x \|$.

7) On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par la donnée du vecteur x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, valable pour tout entier naturel *n*.

a) Montrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $\| x_n \| \leq K^n \| x_0 \|$.

b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Vers quel vecteur ?

c) Donner la nature de la série $\sum\limits_{n} \| x_n \|$.

Problème

Partie 1

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$. On a donc $u_0 = 1$.

1) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.

b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) a) Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, on a l'inégalité : $\mathrm{e}^{x/2} \leq 1 + x$.

b) En déduire, pour tout entier naturel *n*, l'inégalité :

$$u_n \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2/2} \, \mathrm{d}t$$

c) Donner la valeur, pour tout entier naturel *n* non nul, de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt^2/2} \, \mathrm{d}t$.

d) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie 2

3) Montrer que, pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$ est convergente.

Pour toute la suite, on pose, pour tout *n* de $\mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t$$

4) a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n-1}$$

b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Tournez la page S.V.P.

5) a) Montrer, grâce à une intégration par parties effectuée dans J_n, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = 2n\left(J_n - J_{n+1}\right)$$

b) Déterminer J_1.

c) Montrer que la série de terme général $\dfrac{J_n}{n}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_n}{n} = \pi$.

d) Utiliser la relation de la question 5a) pour compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la valeur de J_n.

```
def suiteJ(n):
    J=---
    for k in range(2,n+1):
        J=---
    return J
```

6) Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Partie 3

On désigne par n un entier naturel non nul et on note X_n (resp. Y_n) le nombre de "piles" (resp. "faces") obtenus lors des $2n$ premiers lancers supposés indépendants d'une pièce équilibrée.

7) a) Donner, en justifiant, la loi de X_n.

b) Montrer que $P\left(X_n = Y_n\right) = \dfrac{2}{\pi} J_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(X_n = Y_n\right)$.

c) Justifier sans calcul l'égalité $P\left(X_n < Y_n\right) = P\left(X_n > Y_n\right)$.

d) Montrer que la probabilité d'obtenir strictement moins de "piles" que de "faces" lors de l'expérience décrite plus haut tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

8) Pour tout entier naturel k non nul, on considère la variable aléatoire Z_k qui vaut 1 si l'on a obtenu "pile" au k^e lancer et 0 sinon.

a) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} Z_k = X_n$.

b) En appliquant le théorème limite central à la suite $\left(Z_k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n \leq Y_n) = \frac{1}{2}$$

c) Retrouver le résultat établi à la question 7d).