MATHÉMATIQUES APPROFONDIES - EMLyon 2024

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Problème 1

Partie 1 : Racine(s) d'une matrice carrée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée. On cherche à déterminer s'il existe des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ et, si c'est le cas, à décrire l'ensemble des solutions de cette équation, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$. Alors :

$$AM = M^2 \times M = M^3 = M \times M^2 = MA$$

Une matrice commute toujours avec ses puissances, par associativité du produit matriciel.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
   - Si M est inversible, alors $A = M^2$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
   - Réciproquement, si A est inversible, alors il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée A^{-1}, telle que :

$$AA^{-1} = I_n \iff M^2A^{-1} = I_n \iff M \times MA^{-1} = I_n.$$

   La matrice M est alors bien inversible aussi, d'inverse $M^{-1} = MA^{-1}$.

   On a donc bien démontré par double implication, que A est inversible si et seulement si M est inversible.

3. On considère, dans cette question : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Le calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 0-1 & 0+0 \\ 0+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$.

   On a donc $A^2 + I_2 = 0_2$, donc le polynôme $P(x) = x^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
   Toute valeur propre de A est donc racine de P : mais P n'admet aucune racine réelle ($\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$) ! Par conséquent, A n'admet aucune valeur propre réelle, et ne peut donc pas être diagonalisable.

   b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$M^2 = A \iff \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+bc = 0 = bc+d^2 \\ c(a+d) = -1 \\ b(a+d) = 1 \end{cases}$$