MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES - EMLyon 2024

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major Prépa

Exercice 1

Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad x'(t) = -x(t) + e^t,$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. a) Le cours permet de résoudre directement l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$:

   Les solutions sont les fonctions $x: \ t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda.e^{-t}$, où λ est un réel quelconque.

   b) On cherche ici une fonction x_0 de la forme $x_0: \ t \mapsto (at+b)e^{-t}$ avec a et b deux constantes réelles, qui soit une solution de (E).
   Pour tout réel t : $\quad x_0'(t) = a.e^{-t} + (at+b).(-e^{-t}) = (a-b-at)e^{-t}$, et on doit avoir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_0'(t) = -x_0(t) + e^{-t} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad (a-b-at)e^{-t} = (-at-b+1)e^{-t}$$
$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \ a-b-at = -at-b+1.$$

   Par identification des coefficients, a doit donc être égal à 1, et b peut rester quelconque.
   On prend $b=0$, et alors $x_0: \ t \in \mathbb{R} \mapsto te^{-t}$ est une solution particulière de (E).

   c) D'après le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants : les solutions de (E) sont toutes les fonctions

$$x: \ t \in \mathbb{R} \mapsto te^{-t} + \lambda e^{-t} = (\lambda + t)e^{-t}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Toute solution de (E) est en effet la somme d'une solution de l'équation homogène, et d'une solution particulière de l'équation (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S): \begin{cases} x'(t) & = -x(t) + y(t) \\ y'(t) & = -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. a) Il est clair qu'en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ pour tout réel t, on a :

$$(S) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$