**Exercice 1**

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} M &= A - I \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{4} & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{4} & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}.}$$

(b) Commençons par expliciter la matrice $2M + I$ :

$$2M+I = 2\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{4} & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (2M+I)^3 &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-1+0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0 & -4+1+0 \\ -2+2-0 & -1+1-0 & 8-2-0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{2} & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0-0+0 & 0-0+0 & 3-3+0 \\ 0+0-0 & 0+0-0 & -6+6+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\boxed{(2M+I)^3 = 0.}$$