



MATHÉMATIQUES 2S
(ÉPREUVE N° 283)
ANNÉE 2018
ÉPREUVE CONÇUE PAR HEC PARIS ET ESCP EUROPE
VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

1 – Le sujet

Les trois parties du problème avaient pour objet l'étude de la convergence de séries dont les termes sont des variables aléatoires.

La convergence de telles séries, en loi ou en probabilité, est celle de la suite des sommes partielles associées.

Dans une partie I, on étudiait un cas particulier de série aléatoire, dite série télescopique. Cette partie faisait appel à des connaissances précises sur des notions fondamentales telles que densité de probabilité, fonction de répartition, convergence en loi, produit de convolution et loi normale centrée réduite.

La partie II était consacrée à l'étude de séries numériques « lacunaires » obtenues à partir de la série harmonique (divergente) par effacement de certains de ses termes. Deux exemples de séries convergentes et un exemple de série divergente étaient proposés, cette partie s'achevant sur la complétude d'un script *Scilab*.

Enfin, la partie III, la plus longue, proposait une étude complète des séries aléatoires de Riemann alternées.

Cette partie mobilisait des connaissances sur la convergence de séries numériques, l'inégalité de Markov, le théorème de la limite monotone pour des événements aléatoires et sur les convergences en loi et en probabilité.

Une question de *Scilab* se présentait sous forme graphique et permettait de conjecturer une certaine convergence en loi, convergence que l'on demandait de démontrer dans l'ultime question du problème.

2 – Barème

Les trois parties du problème comptaient respectivement pour 31%, 25% et 44% des points de barème.

Le poids des questions de *Scilab* était assez élevé puisqu'il représentait 14% des points de barème. Les questions les plus cotées étaient : 2.a), 2.b), 2.c), 8.d) et 10.a).

3 – Remarques de correction

D'une façon générale, la connaissance du cours est insuffisante : un petit nombre de questions sont traitées « mécaniquement », sans avoir à réfléchir, tandis que nombre de questions aussi simples et classiques sont laissées de côté.

Les opérations élémentaires et les notions de base sont de plus en plus mal maîtrisées : addition et multiplication sont régulièrement confondues (on passe de $2x = y$ à $x = y-2$; on confond diviser par $2n$ et diviser par n^2 , etc.), propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, utilisation de l'indépendance (invoquée pour l'espérance d'une somme ou pour le théorème de Slutsky mais pas pour la convolution ou la somme de lois normales !!).

1.a) Confusion entre somme et somme partielle. Des conclusions aberrantes : « la somme est nulle », « le terme général tend vers 1, donc la série converge », etc.

2.a) Le calcul de c_n demandait de bien s'organiser. La plupart des fautes de calcul provenaient d'une erreur de signe dans la première intégrale. La manipulation des fractions a été un obstacle insurmontable dans beaucoup de copies. Le graphe de f_3 s'est révélé très discriminant : densités négatives, fonctions non affines, asymptotes verticales, etc.

3.a) Dans une majorité de copies, la variable aléatoire X est bornée puisqu'elle admet une densité bornée, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de Markov !!

3.b) Le théorème de Slutsky est très souvent invoqué. La convergence en probabilité vers une variable aléatoire certaine est rarement invoquée. En revanche, l'indépendance de X_1 et X_{n+1} est présentée comme une condition nécessaire...

3.c) Cette fois, dans l'application de la convolution, l'indépendance est oubliée !!

4.a) On identifie la loi d'une combinaison linéaire de variables aléatoires normales indépendantes en calculant un produit de convolution (alors que c'est du cours!!).

Cette question s'est révélée d'autant plus sélective qu'il n'est pas rare de trouver dans les copies que « la variance d'une différence est égale à la différence des variances » !!

5.c) Cette question n'a été traitée que par environ 5% des candidats.

Beaucoup de candidats utilisent la formule (fausse) : $m^{1/2} m^{1/3} = m^{1/6}$.

6.a) C'est la question qui est souvent traitée correctement.

6.b) De rarissimes candidats prennent soin d'expliquer l'apparition des parties entières dans les bornes.

6.c) La concavité du logarithme est assez bien connue. La manipulation des parties entières est parfois frauduleuse.

8.b) Le développement en série entière de la fonction \exp commence souvent à 1.

8.c) Une part non négligeable de candidats appliquent l'inégalité de Markov à la variable aléatoire S_n qui est centrée et ils en déduisent que $P(S_n > s) \leq 0\dots$

9.a) Le fait qu'une tribu soit stable par union *dénombrable* et intersection *dénombrable* est absent de la plupart des copies.

Questions de Scilab 6.g) et 11.c)

Ces questions donnent très rarement lieu à des explications précises.

Ainsi, dans la question 6.g), très peu de candidats comprennent que l'entier n augmente de 2 en 2 dans la boucle *while*. En particulier, la question demandant de compléter la ligne (6) fut très révélatrice.

Dans la question 11.c), on observe que la notion de convergence en loi ne signifie pas grand-chose pour la plupart des candidats. Ainsi, certains ont « vu » que les valeurs de $H_n - h_n(1)$ convergeaient vers 0 ; d'autres ont affirmé que la loi limite était la loi normale centrée réduite !!

4 – Conseils aux futurs candidats

Pour ce qui concerne la forme, le jury conseille aux futurs candidats de lire attentivement le texte préliminaire qui précède toute épreuve écrite de mathématiques, dans lequel il est précisé notamment, que la lisibilité et la qualité de la rédaction entrent pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies : un correcteur ne s'attarde pas à essayer de « décrypter » une copie illisible. Par contre, une copie propre et claire ne peut qu'avantager son auteur. Le jury rappelle également que les abréviations dans les copies doivent être proscrites et il conseille de bien numéroter les questions et d'encadrer les résultats.

De plus, les raisonnements doivent être clairs et précis, les affirmations étant étayées par une argumentation solide. Par exemple, le recours trop fréquent à des phrases du type « il est clair que... » doit être évité au profit d'une justification correcte fondée sur un apprentissage rigoureux et une très bonne maîtrise du cours.

Le jury recommande aux futurs candidats de prendre le temps de lire l'ensemble du sujet, non seulement pour s'en imprégner, mais aussi pour pointer les questions qui paraissent faciles à résoudre, lesquelles ne se situent pas nécessairement dans la première partie du sujet.

La recherche d'une solution à une question ne doit pas dépasser quatre à cinq minutes. Au-delà de ce délai, en cas d'échec, le candidat doit admettre le résultat de cette question (si la réponse figure dans l'énoncé), passer à la question suivante sans éprouver un sentiment de déstabilisation ou de découragement. Autrement dit, le jury recommande aux futurs candidats de faire preuve d'une grande ténacité.

5 – Statistiques

Sur les 3238 candidats ayant composé dans cette épreuve, la note moyenne est de 10,28 avec un écart-type de 5,75 suffisamment élevé pour classer les candidats de manière satisfaisante.

Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 16 est de 535, soit 16,5% des candidats présents.

On compte 48 candidats qui se voient attribuer la note maximale de 20 en légère progression par rapport au concours 2017.

La note médiane est de 12,4 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 4,6 et 14,9 respectivement.

La note maximale de 20 était attribuée aux candidats ayant obtenu au moins 60% des points du barème.