

MATHEMATIQUES

1^{ère} épreuve (option scientifique)

Lundi 3 mai 2004 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

I - Étude de la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$

On note $F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u} du \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u} du.$$

1. a. Montrer, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$: $F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2} du$.

En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

b. De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

c. En déduire que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ convergent, et que : $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \alpha - F(x)$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \beta - G(x)$.

2. a. Montrer, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ et tout réel $T \in]0; +\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u} du.$$

b. En déduire que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

On note $A :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt.$$

3. Montrer que l'application A est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}.$$

4. Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. a. Montrer : $\forall x \in]0; 1], \quad 0 \leq \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leq -\ln x.$

- b. En déduire que $\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

- c. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

$$\text{II - Étude de la fonction } x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ et tout entier naturel k , l'application $t \longmapsto t^k e^{-xt}$ est bornée sur $[0; +\infty[$, et en déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.

On note, pour tout entier naturel k , $B_k :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par : $B_k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt.$

2. a. Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$$

- b. En déduire, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$:

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

- c. Montrer que, pour tout entier naturel k , B_k est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad B'_k(x) = -B_{k+1}(x).$$

- d. En déduire que B_0 est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$B''_0(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Montrer, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad 0 \leq -B'_0(x) \leq \frac{1}{x^2},$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B'_0(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. a. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$

b. Justifier, pour tout réel $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[:$

$$\int_0^y du = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2} dt,$$

et en déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$

c. En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

III - Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$

On considère l'application $\varphi :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x),$$

où A a été définie dans la Partie I et B_0 a été définie dans la Partie II.

On note $U :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par :

$$U(x) = (\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2.$$

1. Montrer que U est constante sur $]0; +\infty[$.
2. Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
3. En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, A(x) = B_0(x).$
4. Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$?

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geq 0$.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.

Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geq N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geq 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I - Étude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

II - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.
2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III - Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est noté a_{ij} , et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \dots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P .

a. Montrer que $P > 0$.

b. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geq AX$. On note $x_1, \dots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X . On désigne par c le plus petit des réels $\frac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ et k un indice tel que $c = \frac{x_k}{p_k}$.

Établir que $c(p_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}p_j) \geq 0$. En déduire que $c \geq 0$ et que X est positive.

c. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geq A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser **III.1.b**).
En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

3. Donner une caractérisation des matrices productives.

4. *Application* : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.
Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.