

# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1999

## MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

### Problème 1

**Notations :**

- $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 3
- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels.

- On identifie les matrices unicolonnes  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  d'ordre  $n$  avec les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

- $\mathbb{R}^n$  est muni du produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par:

si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , alors  $\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .

En identifiant les matrices de  $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$  avec les réels, on a:  $\langle X, Y \rangle = {}^t X Y$ .

- $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .
- $A_n$  est la matrice de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  dont le terme général  $a_{i,j}$  est égal à 1 si  $|i - j| = 1$  et égal à 0 sinon.

Ainsi, par exemple,  $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A_3$  est diagonalisable.

Déterminer une matrice inversible  $P$  de  $M_3(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D$  de  $M_3(\mathbb{R})$  telles que  $A_3 = P D P^{-1}$ .

2. Soit  $\theta \in ]0; \pi[$ . On désigne par  $S_\theta$  l'ensemble des suites réelles  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que  $s_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $k$ ,  $s_{k+2} - 2 \cos \theta s_{k+1} + s_k = 0$ .

Montrer que, si la suite  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  appartient à  $S_\theta$ , alors pour tout entier naturel  $k$ :  $s_k = s_1 \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$ .

En déduire que  $S_\theta$  est un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $A_n$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur propre (non nul) associé à  $\lambda$ .

On note  $m$  le plus grand des réels  $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ .

- (a) Montrer:  $\begin{cases} \bullet & \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, & \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet & \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}$

Montrer pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ :  $|\lambda| |x_k| \leq 2m$ , et en déduire  $|\lambda| \leq 2$ .

- (b) On suppose  $|\lambda| < 2$ .

Montrer qu'il existe un unique  $\theta \in ]0, \pi[$  tel que  $\lambda = 2 \cos \theta$ .

Montrer que la suite  $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $S_\theta$  déterminée par  $s_1 = x_1$  vérifie:

$$\begin{cases} \bullet \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, & s_k = x_k \\ \bullet & s_{n+1} = 0 \end{cases}$$

En déduire qu'il existe un entier  $p$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$ .

Pour tout entier  $p$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$ ,  $\lambda_p = 2 \cos \theta_p$  et  $X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$ .

- (c) Soit  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $\lambda_p$  est valeur propre de  $A_n$  et que  $X_p$  est un vecteur propre associé à  $\lambda_p$ .
- (d) Montrer que  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  est l'ensemble de toutes les valeurs propres de  $A_n$  et que  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .

4. Soit  $U_n$ , la matrice de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  de terme général  $u_{p,q} = \sin \frac{pq\pi}{n+1}$ ,  $(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

5. Montrer que  $U_n$  est inversible et déterminer la matrice  $D_n$  de  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que:

$$D_n = U_n^{-1} A_n U_n$$

6. (a) Montrer pour tout couple  $(p, q)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ :  $\lambda_p {}^t X_p X_q = \lambda_q {}^t X_p X_q$ .

En déduire que la base  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est orthogonale et que, pour tout couple  $(p, q)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $p \neq q$ , on a:  $\sum_{k=0}^n \sin k\theta_p \sin k\theta_q = 0$ .

(b) Montrer, pour tout  $p$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{k=0}^n \cos 2k\theta_p = 0$ .

En déduire que, pour tout entier  $p$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on a:  $\sum_{k=1}^n \sin^2 k\theta_p = \frac{n+1}{2}$ .

(c) En déduire  $U_n^2 = \frac{n+1}{2} I_n$ , puis  $A_n = \frac{2}{n+1} U_n D_n U_n$ .

## Problème 2

On considère l'application  $f : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout réel  $t$  de  $[0, 1[$ , par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in ]0, 1[ \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, 1[$ .

- (b) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, 1[$  et calculer  $f(t)$  pour tout réel  $t$  de  $]0, 1[$
- (c) Etablir que  $f'(t)$  tend vers  $\frac{1}{2}$  lorsque  $t$  tend vers 0, et que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$ .
- (d) Montrer, pour tout réel  $t$  de  $[0, 1[$ :  $\ln(1-t) + \frac{t}{1-t} \geq 0$ .
- (e) Dresser le tableau de variation de  $f$ . On précisera la limite de  $f(t)$  lorsque  $t$  tend vers 1.
- (f) Tracer l'allure de la courbe représentative de  $f$ . (On n'étudiera pas la dérivée seconde de  $f$  et on admettra que  $f$  est convexe.)
2. (a) Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ , l'intégrale  $\int_0^x f(t)dt$  existe. (On distinguera les cas  $x \in [0, 1[$  et  $x = 1$ .)

On note  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ , par  $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

- (b) Montrer que  $g$  est continue sur  $[0, 1]$ , de classe  $C^2$  sur  $[0, 1[$  et calculer  $g'(x)$  pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ .
- (c) Etablir que  $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers 1.
- (d) Dresser le tableau de variation de  $g$ . On admettra qu'une valeur approchée de  $g(1)$  à  $10^{-2}$  près est : 1,65.
- (e) Etablir que  $g$  est convexe sur  $[0, 1[$ .
- (f) Tracer l'allure de la courbe représentative de  $g$ . On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.
3. (a) Justifier que, pour tout réel  $t$  de  $[0, 1[$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 0} t^n$  converge.

Quelle est sa somme ?

On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $R_n : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$\forall t \in [0, 1[, \quad R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k$$

- (b) Montrer, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $t$  de  $[0, 1[$ :  $R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t}$  et en déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $R_n$  est continue sur  $[0, 1[$ .
- (c) Etablir, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt$$

- (d) Montrer, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0, 1[$  :

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{x}{(n+2)(1-x)}$$

- (e) Démontrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ , la série numérique  $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1}$  est convergente et que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

4. (a) Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$ , la série numérique  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$  est convergente.

On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\rho_n : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par:

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1}$$

- (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\rho_n$ , est continue sur  $[0, 1[$ .

- (c) Etablir, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t) dt$$

- (d) Démontrer. pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $t$  de  $[0, 1[$ :

$$0 \leq \rho_n(t) \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)}$$

- (e) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$  de  $[0, 1[$ :

$$0 \leq \int_0^x \rho_n(t) dt \leq \frac{-\ln(1-x)}{n+2}$$

- (f) Conclure que, pour tout réel  $x$  de  $[0, 1[$  :  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ .