

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1994

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la matrice $A(a)$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A(a)$, pour $a \in \mathbb{R}$.
2. Etudier suivant les valeurs du réels a , l'inversibilité de $A(a)$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
3. On suppose dans cette question 3. seulement : $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -1$.
 - (a) Montrer que $A(a)$ est diagonalisable.
 - (b) Calculer, pour chacune des valeurs propres de A , un vecteur propre de $A(a)$ associé à cette valeur propre.
4.
 - (a) La matrice $A(0)$ est-elle diagonalisable?
 - (b) calculer $(A(0))^2$, $(A(0))^3$, et $(A(0))^n$ pour tout entier naturel n non nul.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$

1.
 - (a) Dresser le tableau des variations de f .
 - (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
 - (c) Tracer la courbe représentative de f (repère orthonormé, unité 5cm)
(Cette courbe admet un point d'inflexion qu'on ne cherchera pas à déterminer)
2.
 - (a) Montrer que l'image par f du segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est le segment $\left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.

(b) On définit la fonction $\varphi : \begin{matrix} \left[0, \frac{1}{2}\right] & \rightarrow & \left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right] \\ x & \mapsto & 2\sqrt{x}e^{-x} \end{matrix}$

Démontrer que φ admet une fonction réciproque continue que l'on notera g .

(c) Dresser le tableau des variations de g .

(d) Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right[$

(e) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? En $\sqrt{\frac{2}{e}}$?

3. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'équation d'inconnue x :

$$\varphi(x) = \frac{1}{n}$$

admet une unique solution dans le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On notera a_n cette solution.

(b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

(c) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ converge vers 0.

EXERCICE 3

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.

La probabilité qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0,1.

On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :

- N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés.
- X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés.
- Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc $N = X + Y$

1. Soit n un entier naturel; calculer pour tout entier naturel k la probabilité conditionnelle suivante :

$$P_{(N=n)}(X = k)$$

2. Donner la loi du couple (X, N) puis montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre 0,5.

3. Déterminer la loi de Y .

4. (a) Si i et j sont deux entiers naturels, calculer la probabilité : $P((X = i) \cap (Y = j))$

(b) X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 4

On pose pour tout entier n non nul

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx \quad \text{et} \quad I_0 = e - 1$$

1. (a) Etablir, pour tout entier n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
- (b) Montrer, pour tout entier n , que : $I_n \geq 0$
- (c) Dédurre des questions 1a et 1b que pour tout n :

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

- (d) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - (e) Montrer que $I_n \sim \frac{e}{n}$
2. Soit a un réel différent de I_0 . On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= a \\ u_{n+1} &= e - (n+1)u_n \end{cases}$$

Montrer que $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

(On pourra considérer la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $D_n = |u_n - I_n|$)