

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1993

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème 1

Partie I

1 - Soit E un espace vectoriel réel; on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E .

Pour tout $\phi \in \mathcal{L}(E)$, on note $\phi^0 = Id$, $\phi^1 = \phi$ et pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, $\phi^n = \phi^{n-1} \circ \phi$.

Soient

- p, q deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ non nuls et tels que $p + q = Id$.

- a, b deux réels distincts et non nuls.

- f un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $f = ap + bq$ et $f^2 = a^2p + b^2q$.

a. Montrer que $(f - aId) \circ (f - bId) = (f - bId) \circ (f - aId) = 0$ et $f - aId = (b - a)q$ et $f - bId = (a - b)p$.

b. En déduire que $p \circ q = q \circ p = 0$.

c. Montrer que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.

2 - Prouver que pour tout entier n , $f^n = a^n p + b^n q$.

3 - a. Calculer $f \circ \left(\frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q\right)$.

b. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} à l'aide de p, q, a et b .

4 - a. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{a, b\}$.

b. En supposant que E est de dimension finie, f est-il diagonalisable?

Partie II

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 13 & -60 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 24 & -5 \end{pmatrix}$.

- 1 -** Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^2 = \alpha M + \beta Id$. Et déterminer α et β .
- 2 -** En déduire deux réels a et b tels que: $(M - aId)(M - bId) = 0$.
- 3 -** Montrer qu'il existe un couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on exprimera en fonction de M et de Id tel que:
$$\begin{cases} A + B = Id \\ aA + bB = M \end{cases}$$
- 4 -** En déduire la valeur de M^n pour tout entier n .

Problème II

Les parties **I** et **II** sont indépendantes. La résolution de la partie **III** utilise des résultats des parties **I** et **II**.

Partie I

A - Soit f l'application de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}] : f(x) = \frac{x}{\sin x} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de f sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité: 5cm).

B - Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe un réel $A \geq 0$, tel que pour tout réel

$$x > 0 : \left| \int_0^1 \sin(xt)g(t) dt \right| \leq \frac{A}{x}$$

2. En déduire la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^1 \sin(xt)g(t) dt$.

C - Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$

1. on nomme ϕ l'application de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \frac{P(x)}{\sin(\frac{x\pi}{2})}$.
 - a. Exprimer ϕ à l'aide de la fonction f étudiée au A.

b. En déduire que ϕ possède un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Le définir.

2. Montrer enfin que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\pi t}{\sin \frac{\pi t}{2}} dt = 0$.

Partie II

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par h l'application de E dans E qui, à tout polynôme P associe le polynôme $Q = h(P)$ défini par: $\forall x \in \mathbb{R}, : Q(x) = \int_0^x (t-x)P(t) dt + \frac{x^2}{2} \int_0^1 P(t) dt$

A - Etude de h .

1. Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$

a. Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, : Q'(x) = x \int_0^1 P(t) dt - \int_0^x P(t) dt$.

b. Calculer Q'' .

2. Montrer que h est une application linéaire et que le noyau de h est l'ensemble des polynômes constants et l'image de h est l'ensemble des polynômes Q tels que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$. (On pourra calculer pour un tel polynôme Q , $h(Q'')$)

B - On considère la suite de polynômes (P_n) définie par:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & : P_1(x) = \frac{x^2}{2} - x \\ \forall n \geq 2 & : P_n = h(P_{n-1}) \end{cases}$$

1. Calculer P_2 et P_3 .

2. Quelles sont les valeurs de $P_n(0)$, $P'_n(0)$ et $P'_n(1)$ pour $n \geq 2$?

3. Exprimer en fonction de n le monôme de plus haut degré de P_n .

4. Dédurre de A1 la relation: $\forall n \geq 2, P''_n = \int_0^1 P_{n-1}(t) dt - P_{n-1}$.

Etablir alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les deux relations:

$$\forall n \geq 2 : \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^1 P_{n-1}(t) \cos(k\pi t) dt$$

$$\forall n \geq 1 : \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}$$

Partie III

A - 1. Etablir, pour tout N entier naturel non nul: $\forall t \in]0, \pi], : \sum_{k=1}^N \cos(kt) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$.

2. En déduire, pour N et n entiers naturels non nuls, $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n} \int_0^1 P_n(t) \left(\frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \right) dt$.

puis, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = -\pi^{2n} \int_0^1 P_n(t) dt$.

3. Application:

Montrer que les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$, et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$ peuvent s'exprimer sous la forme $\frac{\pi^a}{b}$ où a et b sont des entiers que l'on calculera.

- B -** 1. On pose $P_n = \sum_{p=0}^{2n} a_{n,p} X^p$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n,0} = 0, \\ a_{n,1} = 0, \\ a_{n,2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{a_{n-1,p}}{p+1}, \\ a_{n,p} = -\frac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)} \end{array} \right. \quad \forall p \in \llbracket 3, n \rrbracket;$$

2. Le but de cette question est d'écrire un programme permettant de calculer le réel β_n tel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \beta_n \pi^{2n}, \text{ pour } n \in \llbracket 1, 25 \rrbracket \text{ donné par l'utilisateur.}$$

- Quel type de variable informatique est adapté à la représentation d'un polynôme?
- Ecrire un programme en PASCAL qui calcule les coefficients de P_n puis le réel β_n et l'affiche.