

# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1993

## MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

### EXERCICE 1

$f$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , notée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer les valeurs propres de  $f$   
On les notera  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de sorte que  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$   
(b) En déduire, sans autre calcul, les réponses aux questions suivantes :  
 $A$  est-elle diagonalisable ?  
 $A$  est-elle inversible ?
- Pour tout  $p \in \{1, 2, 3\}$ , montrer qu'il existe un vecteur propre  $\vec{e}_p$  de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_p$  dont la  $p^{\text{ième}}$  coordonnée dans la base canonique  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est 1. Donner les coordonnées de  $\vec{e}_p$  dans cette base.
- Soit  $P$  la matrice de passage de  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  à la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . Ecrire  $P$ . Calculer  $P^{-1}$  : les calculs devront figurer sur la copie.
- Pour  $n \in \mathbb{N}^\times$ , calculer  $A^n$  : on donnera de façon explicite les neufs coefficients de la matrice  $A^n$ .

### EXERCICE 2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

## I. Etude de $f$ .

1. Former le tableau de variation de  $f$
2. (a) Résoudre l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$   
(b) Résoudre l'équation  $f(x) \leq x$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$
3. Tracer la courbe représentative ( $C$ ) de  $f$  dans un repère orthonormé d'unité 5cm, et préciser la position relative de ( $C$ ) et de la première bissectrice (on ne cherchera pas d'éventuels points d'inflexion)

## II. Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Que dire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si  $u_0 = -1$  ou  $u_0 = 0$  ?
2. On suppose ici  $u_0 < -1$ .
  - (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < -1$
  - (b) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
  - (c) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel que l'on déterminera.
3. On suppose ici  $-1 < u_0 < 0$ .  
Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
4. On suppose ici  $u_0 > 0$ .  
Sans en donner de démonstration, quel résultat obtiendrait-on concernant la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans ce cas?

## EXERCICE 3

### Question préliminaire

Soient  $k$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $0 < 3k \leq n$

1. (a) Démontrer que  
pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i \leq k-1$ ,  $C_n^i \leq \frac{1}{2}C_n^{i+1}$   
puis que  
pour tout  $i$  tel que  $0 \leq i \leq k$ ,  $C_n^i \leq \frac{1}{2^{k-i}}C_n^k$   
(b) En déduire que  $C_n^k \leq \sum_{i=0}^k C_n^i \leq 2C_n^k$

Monsieur X vend des journeaux, sur le marché le samedi matin; il propose au choix, deux quotidiens A et B. Il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B.

On suppose :

- qu'aucun client ne demande A et B
- que si un client demande A (respectivement B) alors que le stock de A (respectivement B) est épuisé, il part sans demander B (respectivement A)

- que les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres.

Un samedi, 60 clients se présentent dans la matinée. chaque client qui demande soit A soit B avec la même probabilité 0,5.

1.  $Y$  est la variable aléatoire égale au nombre de clients qui demandent A dans cette matinée.  
Détermine la loi de  $Y$   
Donner son espérance et sa variance.
2. On note  $x$  la probabilité de l'événement "Monsieur X ne satisfait pas toutes les demandes, cette matinée"
  - (a) Exprimer  $x$  à l'aide de la loi de  $Y$ .
  - (b) Dédire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de  $x$ .
  - (c) Dédire de la question préliminaire un encadrement de  $x$ .
  - (d) Comparer, en utilisant des valeurs numériques approchées données en annexe, les résultats des questions **b** et **c**.

Annexe :  $C_{60}^{20} \simeq 4,192.10^{15}$ ;  $C_{60}^{19} \simeq 2.045; 10^{15}$ ;  $C_{60}^{18} \simeq 9,250.10^{14}$

## EXERCICE 4

Pour tout entier  $n$  on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x e^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

1. (a) Former le tableau de variation sur  $[0, 1]$  de  $x \rightarrow x e^{-x^2}$ ..  
(b) En déduire pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$$

- (c) Etudier la convergence de la suite  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ :

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}$$

- (b) En déduire la limite de  $I_n$  et celle de  $n.I_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .