Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1991

MATHEMATIQUES

1ere épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^\times$, $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A(\alpha)$.

1. (a) Calculer les valeurs propres de f_α.
   (b) f_α est-il diagonalisable ?
   (c) Pour quelles valeurs de α, f_α est-il un isomorphisme ?
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f_α.

EXERCICE 2

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 4x + 2. \end{array}$

   Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs du paramètre réel $\mathfrak{M}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Résoudre $f(x) = -1$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$ pour tout n entier naturel.

   On rappelle la définition suivante: une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite stationnaire si elle vérifie:

   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow v_{n+1} = v_n).$$

   Montrer qu'il existe trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2$. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant les valeurs de u_0.

EXERCICE 3

Une urne contient p jetons numérotés de 1 à p ($p \geqslant 2$). On effectue N tirages successifs ($N \geqslant 1$): chaque tirage consiste à prendre un jeton dans l'urne, noter son numéro, puis remettre le jeton dans l'urne.
Pour tout entier i compris entre 1 et p, on définit les variables aléatoires F_i et X_i comme suit:

- F_i est le nombre de fois où le jeton numéroté i a été tiré
- X_i prend la valeur 0 si le jeton numéroté i n'a pas été tiré et prend la valeur 1 si le jeton numéroté i a été tiré au moins une fois.

1. **Étude des variables aléatoires F_i.**

   (a) Pour tout i compris entre 1 et p, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire F_i .

   (b) On considère la variable aléatoire $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$.
   Que vaut F ? Calculer l'espérance et la variance de F.

   (c) Est-ce que les variables aléatoires F_i sont deux à deux indépendantes ?

2. **Étude des variables aléatoires X_i.**

   (a) Pour tout i compris entre 1 et p, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i.

   (b) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et p.
   Déterminer la probabilité pour que $X_i = 0$ sachant que $X_j = 0$.
   Est-ce que les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes ?

   (c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{p} X_i$.

3. **Application**

   Vous êtes responsable du service après-vente d'une chaîne de magasins. Ce service est présent sur quinze sites et, au total, il reçoit en moyenne cinquante appels par jour.

   (a) En utilisant le début de l'exercice pour modéliser cette situation, donner une interprétation des variables aléatoires F_i, X_i et X.

   (b) Calculer des valeurs approchées à 10^{-1} près de l'espérance de F_i, de l'espérance de X_i et de l'espérance de X.
   Commenter brièvement ces résultats .

EXERCICE 4

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx.$$

1. **Étude de la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$.**

(a) Calculer J_1.

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

(c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\geqslant 1}$.

2. **Étude de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.**

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

(b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

(c) Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.