Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1987

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota :
- les quatre exercices sont indépendants.
- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

EXERCICE 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer B^2 puis B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Vérifier que $A = I + B$ et en déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

On considère la fonction définie par $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{e^x}{x+10} \end{array}$

1. (a) Calculer f' et f''. Etudier les variations de la fonction f. Tracer la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé, l'unité étant prise égale à $10\,cm$.
   (b) Démontrer que, $\forall x \in [0;1] \quad 0,09 \leqslant f'(x) \leqslant 0,225$.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique dans $[0;1]$, qui sera notée l.
   Donner une valeur approchée l_0 de l à 10^{-1} près par défaut, par lecture du graphique.
2. On considère la suite définie par $u_0 = l_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Calculer $f(0,2)$, et en déduire $l \leqslant 0,2$. Calculer $f'(0,2)$.
   (c) Etablir que, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \leqslant 0,11$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, et déterminer un entier n_0 tel que $l - u_{n_0} \leqslant 10^{-3}$.
   Calculer u_{n_0}.

EXERCICE 3

Tous les dés considérés sont cubiques, et les apparitions des faces sont équiprobables.
On considère le dé A dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et les sept dés D_i ($1 \leqslant i \leqslant 7$) tels que, pour chaque i, le dé D_i possède $i-1$ faces blanches et $7-i$ faces noires (par exemple, le dé D_3, contient 2 faces blanches et 4 faces noires).
On choisit tout d'abord un numéro i compris entre 1 et 7 en lançant le dé A et en procédant de la façon suivante :

- si le résultat du lancer est $2, 3, 4, 5$ ou 6, on choisit le numéro sorti,
- si le résultat du lancer est 1, on lance à nouveau le dé A, et si le nouveau résultat est $1, 2$ ou 3, on choisit le numéro 1, sinon on choisit le numéro 7.

Après avoir choisi de cette façon le numéro i ($1 \leqslant i \leqslant 7$), on joue exclusivement avec le dé D_i. On lance D_i successivement plusieurs fois de suite : les lancers successifs sont indépendants les uns des autres.
L'observateur qui compte les faces noires ignore quel est le dé D_i utilisé.

1. Calculer la probabilité pour qu'il sorte une face noire au premier lancer.
2. Sachant qu'il est sorti une face noire aux deux premiers lancers, calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au troisième lancer.
3. Calculer la probabilité qu'il sorte une face noire au $n^{ème}$ lancer, sachant que dans les lancers précédents, il est toujours sorti une face noire. Calculer la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$, et interpréter le résultat.

EXERCICE 4

Soit $f : \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 12\left(t^2 - t^3\right) & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{array} \right. \end{array}$

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Est-ce que f est dérivable sur $\mathbb{R}$?
   (c) Etudier les variations de f , et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité $5\,cm$). On précisera les coordonnées du point d'inflexion.
   (d) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.
2. Soit $F : \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt \end{array}$
   (a) Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Étudier les variations de F, et tracer sa courbe représentative sur le même schéma que f.
3. Soit $G : \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in]-\infty;1[\\ 1 - F\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in [1;+\infty[\end{array} \right. \end{array}$
   (a) Calculer $G(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Calculer les trois dérivées successives G', G'', G''' de G, et tracer la courbe représentative de G' (repère orthonormé, unité de $5\ cm$).
4. Interpréter, dans le vocabulaire des probabilités, les résultats des questions **1** et **2**.