

# Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1986

## MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

---

Remarques : Les quatre exercices sont indépendants.

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{R}$  celui des nombres réels.

### Exercice 1

On note  $f$  l'endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique  $B = (e_1, e_2, e_3)$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on considère les trois éléments  $v_1, v_2, v_3$  de  $\mathbb{R}^3$  définis par :

$$v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3, \quad v_2 = -e_2 + e_3, \quad v_3 = e_3.$$

1. Calculer  $e_1, e_2, e_3$  en fonction de  $v_1, v_2, v_3$ .
2. Montrer que  $B' = (v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . On note  $P$  la matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$ ; calculer  $P$  et  $P^{-1}$ .
3. Déterminer la matrice  $A'$  de l'endomorphisme  $f$  relativement à la base  $B'$ .
4. Calculer  $(A')^2, (A')^3, (A')^n$  puis  $A^n$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .

### Exercice 2

On désigne par  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

On définit la fonction  $h = f * g$  par :  $h : x \mapsto h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) dt$

1. Montrer que  $f * g = g * f$ .
2. Dans cette question, on suppose que :  
pour  $x \leq 0$ ,  $f(x) = g(x) = 0$   
et pour  $x > 0$ ,  $f(x) = x^p$  et  $g(x) = x^q$  avec  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ .  
On pose  $I_{p,q} = f * g$ .

(a) Déterminer  $I_{p,0}, I_{1,1}$  et  $I_{1,2}$ .

- (b) Pour  $p$  et  $q$  entiers naturels,  $q \geq 1$ , établir une relation entre  $I_{p,q}$  et  $I_{p+1,q-1}$  et en déduire explicitement  $I_{p,q}$ .
3. On suppose que  $f$  et  $g$  sont définies respectivement par  $f(x) = |x|$  et  $g(x) = x - 1$  pour tout  $x$  réel. Déterminer la fonction  $f * g$  et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé ; on précisera la tangente à l'origine du repère.

### Exercice 3

Une urne contient 3 boules (une bleue, une blanche et une rouge) dont les tirages sont supposés équiprobables. On effectue des tirages successifs d'une boule, avec remise à chaque fois de la boule tirée. Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on appelle  $A_n$  l'événement : les  $n - 1$  premiers tirages ont donné la même boule et la  $n^{\text{ème}}$  boule tirée est différente de celle tirée lors des  $n - 1$  premiers tirages.

- Déterminer  $p(A_2)$ ,  $p(A_3)$  et  $p(A_n)$  pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq 2$ .
- Calculer  $\sum_{n=2}^{+\infty} p(A_n)$ .
- On appelle  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur  $n$  lorsque  $A_n$  est réalisé et 0 lorsque  $A_n$  n'est pas réalisé ; calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

### Exercice 4

On considère la fonction  $f$  définie par  $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-3x^2} - 3x + 5 \end{array}$ .

- Calculer les dérivées  $f'$  et  $f''$ . Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Tracer la courbe représentative  $C_f$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé, l'unité étant égale à 2cm. Quelles sont les coordonnées des points d'inflexion de  $C_f$ .
- Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à l'aide de  $C_f$ .
- Donner une meilleure valeur approchée de  $\alpha$  à l'aide du théorème des accroissements finis.