

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1985

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME 1

Soient p un entier naturel ≥ 2 , et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à p (on convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$). On note Δ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$, associe le polynôme ΔP défini par

$$\Delta P(X) = P(X + 1) - P(X)$$

Partie I

- (a) Vérifier que Δ est une application linéaire.
(b) Quel est le noyau de Δ ?
(c) Déterminer le degré de ΔP en fonction de celui de P , pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$.
- On définit les polynômes P_n pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq p$, par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, \Delta P_n = P_{n-1} \text{ et } P_n(0) = 0 \end{cases}$$

- Calculer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .
- Montrer que la famille $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, et que tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$ se décompose sous la forme :

$$P = \sum_{n=0}^p \alpha_n P_n \quad \text{avec} \quad \alpha_n = (\Delta^n P)(0)$$

où

$$\Delta^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_p[X]} \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, \Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$$

Partie II

1. Soit n un entier de $\llbracket 1, p \rrbracket$.
 - (a) Montrer que $P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1) \dots (X-n+1)$.
 - (b) Démontrer que, pour tout k de \mathbb{Z} , $P_n(k)$ est dans \mathbb{Z} .
 - (c) Prouver, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$: $\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^p C_n^k (-1)^{n-k} P(X+k)$.
2. Démontrer que, pour tout P de $\mathbb{R}_p[X]$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (I) Les composantes de P dans la base $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$ sont dans \mathbb{Z} .
 - (II) Pour tout k de \mathbb{Z} , $P(k)$ est dans \mathbb{Z} .

Partie III

1.
 - (a) Ecrire la matrice M de Δ dans la base $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$.
 - (b) Calculer M^k pour tout entier naturel k non nul.
2.
 - (a) Quelles sont les valeurs propres de M ?
 - (b) Montrer que M n'est pas diagonalisable.

PROBLEME 2

Dans tout ce problème, on désigne par C_f le graphe de la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie 1

1.
 - (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
 - (b) Montrer que f est continue et dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?
 - (c) Préciser la position de C_f par rapport à sa tangente à l'origine.
2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

- (a) Etudier les variations de h sur \mathbb{R}_+ .
 - (b) Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $h(\alpha) = 0$.
Ecrire un programme Pascal donnant, par dichotomie, une valeur approchée de α à 10^{-6} près.
3.
 - (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.
 - (b) Étudier les variations de f sur \mathbb{R}_+ , puis sur \mathbb{R} .
 - (c) Tracer la représentation graphique C_f de f dans un repère orthonormé.
(On donne $\alpha \simeq 1.9$ et $f(\alpha) \simeq 1.1$)

Partie 2

1. Pour $a > 0$, montrer que l'intégrale impropre $K(a) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx$ converge et la calculer.
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente. On notera I cette intégrale.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = f(x)e^{-2nx}$.
Montrer que l'intégrale impropre $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Montrer qu'on peut écrire $\frac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}}$ sous forme d'une somme de n termes.
(b) Calculer $f(x) - f_n(x)$, et en déduire que $I = 2 \sum_{i=0}^{n-1} K(2i + 1) + I_n$.
4. Le but de cette question est de montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
On remarque que:

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx + \int_1^{+\infty} f_n(x) dx$$

- (a) On considère la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.
Montrer que $0,4 \leq \varphi(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$, puis montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_0^1 f_n(x) dx \leq 2,5 \int_0^1 x e^{-(2n+1)x} dx \leq \frac{2,5}{2n+1}$$

- (b) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[1, +\infty[$, on a $0,8 \leq 1 - e^{-2x} \leq 1$.
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\int_0^{+\infty} x^2 x e^{-(2n+1)x} dx \leq \frac{2}{2n+1}$, et en déduire une majoration de $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$.
- (c) Conclusion.