

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1983

MATHEMATIQUES

2ème épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les problèmes 1 et 2 sont indépendants.

Problème 1

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Partie 1

Soit p un nombre réel tel que : $0 < p < 1$. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les termes vérifient la relation de récurrence : $u_{n+1} + pu_n - p = 0$, pour $n > 1$.

1. Déterminer les nombres réels α et β tels que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par $v_n = u_n - \alpha$, pour $n \geq 1$, vérifie la relation : $v_{n+1} = \beta v_n$.
2. Calculer u_n en fonction de p et u_1 .
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite ℓ en fonction de p .
4. Dans le cas particulier où $u_1 = p = \frac{1}{2}$, trouver le plus petit entier naturel n tel que : $|u_n - \ell| < 10^{-3}$.

Partie 2

Soit p un nombre réel tel que : $0 < p < 1$.

On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont les termes vérifient les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} + pv_n - p &= 0 & \text{si } n \geq 1 \\ v_{n+1} + pu_n - p &= 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

1. On définit deux suites $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante, où α et β désignent deux nombres réels :

$$\begin{cases} u'_n &= u_n - \alpha & \text{si } n \geq 1 \\ v'_n &= v_n - \beta & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Déterminer α et β pour qu'on ait la relation matricielle suivante, pour tout entier naturel n , $n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} u'_{n+1} \\ v'_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u'_n \\ v'_n \end{pmatrix}$$

où M est une matrice 2×2 à coefficients réels que l'on déterminera.

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de M .
3. Dédurre de ce qui précède, pour tout entier naturel n , $n \geq 1$, les expressions de u_n et v_n en fonction de u_1 , v_1 , n et p . (On distinguera les cas où n est pair et n est impair).

Problème 2

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Dans un stand de tir, un tireur T a une probabilité p , $0 < p < 1$, d'atteindre une cible donnée.

Il effectue des tirs répétés indépendants.

Partie 1

Le tireur T joue une partie selon les règles suivantes :

- Il a gagné (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus deux ; on note W cet événement.
- Il a perdu (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins deux ; on note L cet événement.
- La partie s'arrête si et seulement si l'un des deux événements W ou L se produit.

Outre les événements W et L définis ci-dessus, on considérera les événements suivants, où n est un entier naturel non nul :

S_n : le n -ième tir est dans la cible.

E_n : le n -ième tir est en dehors de la cible.

Z_n : la partie n'est pas terminée à l'issue du n -ième tir.

W_n : le tireur T a gagné la partie à l'issue du n -ième tir.

L_n : le tireur T a perdu la partie à l'issue du n -ième tir.

On note : $q = 1 - p$ et $u = 2pq$.

1. (a) Exprimer l'événement Z_2 en fonction des événements S_1 , E_1 , S_2 , E_2 .
 (b) Exprimer l'événement Z_4 en fonction des événements Z_2 , S_3 , E_3 , S_4 , E_4 .
 (c) Calculer les probabilités des événements Z_1 , Z_2 , Z_3 et Z_4 .
 (d) Pour tout entier naturel n , $n \geq 1$, calculer la probabilité de l'événement Z_n .
2. Pour tout entier naturel n , $n \geq 1$, calculer la probabilité de l'événement W_n et la probabilité de l'événement L_n .
3. On désigne par w et ℓ les probabilités respectives des événements W et L .
 (a) Calculer w et ℓ .
 (b) Calculer la probabilité de l'événement : "la partie ne s'arrête pas".
4. On admettra que le nombre de tirs effectués au cours d'une partie est une variable aléatoire X .
 (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 (b) Calculer l'espérance mathématique de X .

Partie 2

Le tireur T joue une partie selon les nouvelles règles suivantes :

- Il a gagné (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus deux ; on note W cet événement.
- Il a perdu (et la partie est terminée) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins trois ; on note L cet événement.
- La partie s'arrête si et seulement si l'un des événements W ou L se produit.

Outre les événements W et L définis ci-dessus, on considérera les événements suivants, où n est un entier naturel non nul:

A_n : à l'issue du n -ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, plus un.

B_n : à l'issue du n -ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors.

C_n : à l'issue du n -ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins un.

D_n : à l'issue du n -ième tir, le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors, moins deux.

Pour tout entier naturel non nul, on désigne respectivement par a_n, b_n, c_n, d_n , les probabilités des événements A_n, B_n, C_n, D_n ; et on pose $a_0 = c_0 = d_0 = 0$, $b_0 = 1$.

1. Exprimer a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}$.
2. On admettra que les séries de termes généraux a_n, b_n, c_n, d_n sont des séries convergentes. On désigne par a, b, c et d leurs sommes respectives.
 - (a) Dédurre de la question 1 quatre relations entre a, b, c, d et calculer a et d .
 - (b) Calculer les probabilités w et ℓ des événements W et L .
 - (c) Calculer la probabilité de l'événement : "la partie ne s'arrête pas"
 - (d) Démontrer qu'il existe une et une seule valeur de p telle que $w = \ell$.