

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1983

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : la partie I est complètement indépendante des parties II et III. Les parties II et III sont largement indépendantes l'une de l'autre.

Partie I

On considère, pour tout entier naturel p , les intégrales impropres

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx \quad \text{et} \quad J_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx$$

1. Etude de I_p

(a) Montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que :

$$\forall x \geq M \quad x^p e^{-x} \leq \frac{1}{x^2},$$

et en déduire que I_p existe pour $p \in \mathbb{N}$.

(b) Exprimer I_{p+1} à l'aide de I_p , puis en déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Etude de J_p

(a) Montrer que J_p existe pour $p \in \mathbb{N}^\times$.

(b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \forall x > 0, \quad \frac{x^n}{e^x - 1} = x^n \sum_{k=1}^n e^{-kx} + \frac{x^n e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

(c) Pour $k \in \mathbb{N}^\times$, calculer $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^p e^{-kx} dx$.

(d) Montrer que, pour $x \geq 0$, $e^x - 1 \geq x$, puis que, pour $p \in \mathbb{N}^\times$,

$$0 \leq \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \frac{(p-1)!}{n^p}$$

(e) En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^\times$ et $n \in \mathbb{N}^\times$,

$$\left| J_p - p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} \right| \leq \frac{(p+1)!}{n^p}.$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n^{p+1}}$.

Rappeler pour quelles valeurs de p cette série est convergente et, dans ce cas, exprimer sa somme en fonction de J_p .

Partie II

Soit x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

$$u_0 = x; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2\sqrt{u_n}} \quad (1)$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^\times$, $u_n \geq 1$.
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et convergente.
(b) Déterminer la limite de cette suite.
3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.
 - (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $v_n > 0$.
 - (b) Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?
 - (c) En déduire que la suite (P_n) définie par

$$P_n = \prod_{k=0}^n u_k \quad (2)$$

est convergente. (Ne pas essayer de calculer sa limite).

Partie III

1. A tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \end{cases} \quad (3)$$

- (a) Calculer a_n et b_n en fonction de n dans les deux cas particuliers $a = 0, b \geq 0$ et $a \geq 0, b = 0$.
- (b) Montrer que $a_n \leq b_n$ pour $n \geq 1$, et que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones pour $n \geq 1$.
- (c) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite. Cette limite qui est fonction de (a, b) , et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $\mathcal{L}(a, b)$.

(d) Montrer que, pour $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $\lambda \geq 0$:

$$\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a) \quad (4)$$

$$\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b) \quad (5)$$

$$\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a, b) \leq \frac{1}{2}(a + b) \quad (6)$$

2. On utilise la limite étudiée plus haut pour définir la fonction $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x) = \mathcal{L}(1, x)$.

(a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$. Montrer que F est positive et croissante.

(b) Montrer que, pour $x > 0$:

$$\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}(1 + x) \quad (7)$$

$$F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right) \quad (8)$$

$$F(x) = \sqrt{x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) \quad (9)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}(1+x)F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) \quad (10)$$

3. En utilisant les résultats de 2 -

(a) Montrer que F est dérivable au point 1 et donner la valeur de $F'(1)$.

(b) Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que F est continue en 0. Est-elle dérivable en ce point ?

(d) Étudier les limites éventuelles, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\frac{F(x)}{x}$ et $\frac{F(x)}{\sqrt{x}}$.

4. Pour $x > 0$, exprimer P_n , défini par (1) et (2), en fonction de $F(x)$ et $F(u_{n+1})$. Retrouver ainsi que la suite (P_n) converge et exprimer sa limite en fonction de $F(x)$.