

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1982

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota: les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1

On désigne par E l'espace vectoriel sur des polynômes à une indéterminée X à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que E est de dimension 3 et que les trois polynômes 1, X , X^2 en constituent une base que l'on notera B .

On considère l'application φ , de E dans E , définie par

$$\varphi : P \mapsto \varphi(P) = (X^2 - 1)P' - (2X + 1)P.$$

P' désignant le polynôme dérivé de P .

1. Démontrer que φ est une application linéaire de E dans E .
2. Ecrire la matrice A de φ relative à la base B .
3. Déterminer les valeurs propres de φ . En déduire que φ est un isomorphisme.
4. Déterminer les sous-espaces propres de φ et montrer que φ est diagonalisable.
5. Déterminer une base B' de E dans laquelle la matrice A' de φ est diagonale.
Ecrire la matrice de passage M de la base B à la base B' et la relation entre les matrices A , A' , M et M^{-1} .
6. (a) Déduire de 5) la relation

$$A^k = M(A')^k M^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}^\times$$

- (b) Application: déterminer $\varphi^k(1)$, $k \in \mathbb{N}^\times$, sachant que $\varphi^k = \varphi^{k-1} \circ \varphi$.

Exercice 2

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$

1. (a) Etudier la fonction f et donner sa courbe représentative.
(b) Montrer que

$$\text{si } |x| \geq 2, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

2. Montrer qu'il existe un nombre L unique tel que $f(L) = L$ et que $2 \leq L \leq 2 + \frac{1}{4}$
(on pourra étudier la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$).

3. Soit un réel $x \geq 2$. En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction f sur $[x, L]$ ou $[L, x]$, montrer que

$$|f(x) - L| \leq |x - L|.$$

4. On considère la suite $n \mapsto u_n$ définie par $u_0 \neq 0$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$

- (a) Montrer que $\forall n \geq 1, u_n > 2$.
- (b) Montrer que $\forall n \geq 1, |u_{n+1} - L| \leq |u_n - L|$.
- (c) En déduire que, quel que soit $u_0 \neq 0$, la suite $n \mapsto u_n$ converge vers L .

Exercice 3

Introduction: on s'intéresse à la transmission d'une information binaire, c'est-à-dire ne pouvant prendre que deux valeurs.

On admet que le procédé de transmission directe entre deux individus A et B est tel que, lorsque A émet une valeur de l'information à destination de B, ce dernier reçoit la valeur émise par A avec la probabilité p , et donc l'autre valeur avec la probabilité $q = 1 - p$.

Dans tout le problème, p est supposé connu et vérifie : $0 < p < 1$.

1. On considère des individus successifs $i_0, i_1, \dots, i_n, n \in \mathbb{N}^\times$.
L'information émise par i_0 est transmise à i_1 , qui transmet la valeur reçue à i_2 , et ainsi de suite jusqu'à i_n .
Entre deux individus i_k et i_{k+1} , $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la transmission de l'information suit la loi décrite dans l'introduction.
On note p_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, la probabilité que la valeur de l'information recue par i_k soit identique à celle émise par i_0 , et on pose $p_0 = 1$.
 - (a) Trouver la relation liant p_{k+1} et p_k , $k \geq 0$ (attention : i_{k+1} peut recevoir la valeur émise par i_0 même lorsque i_k a reçu l'autre valeur ...).
 - (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p .
 - (c) Calculer p_n . Que conclure ?
2. Dans cette question, l'individu i_0 émet l'information à destination directe (c'est-à-dire sans l'intermédiaire d'autres individus) d'une infinité d'individus $\{i_k\}$, dont une partie se trouve «à l'écoute».
Le nombre X d'individus à l'écoute suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Entre i_0 et chacun des individus à l'écoute, la transmission de l'information suit la loi décrite dans l'introduction.
 - (a) Lorsque n individus sont à l'écoute, quelle est la probabilité pour qu'ils soient k , $0 \leq k \leq n$, à recevoir la valeur de l'information émise par i_0 , et donc $n - k$ à recevoir l'autre valeur ?
 - (b) Exprimer en fonction de p et λ la probabilité pour qu'aucun individu ne reçoive la valeur de l'information émise par i_0 (c'est-à-dire qu'aucun individu n'est à l'écoute, ou que tous les individus à l'écoute reçoivent l'autre valeur d'information).
 - (c) Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre d'individus recevant la valeur de l'information émise par i_0 .
Montrer que la loi de probabilité de Y est une loi de Poisson de paramètre λp .
Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$, espérance mathématique et variance de Y .

Exercice 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose :

$$u_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin x}{1 + \tan x} dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_0^{\pi/n} \frac{x}{1 + x} dx$$

1. Calculer v_n et en donner un équivalent simple lorsque n tend vers l'infini.

2. (a) Montrer que, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$:

$$0 \leq \sin x \leq x \quad \text{et} \quad x \leq \tan x.$$

(b) En déduire que, pour $n \geq 3$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

3. Etudier la convergence de la série de terme général v_n , puis de la série de terme général u_n .

FIN