

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1981

MATHEMATIQUES

2ème épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les deux problèmes sont indépendants.

Problème 1

On considère le jeu électronique suivant :

un point lumineux L se déplace par sauts successifs sur un axe d'origine O , et peut à chaque instant se situer en l'un des cinq points P_j d'abscisses j égales à : $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Lorsque le point L est en P_j , j élément de $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ à l'instant t , la probabilité pour qu'il se positionne en P_k , k élément de $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$ à l'instant $t + 1$ est fournie par le tableau ci-dessous

instant $t + 1 \rightarrow$ instant t $\downarrow$	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2
P_{-2}	0	1	0	0	0
P_{-1}	1/2	0	1/2	0	0
P_0	0	1/2	0	1/2	0
P_1	0	0	1/2	0	1/2
P_2	0	0	0	0	1

Par exemple, si L est en P_0 à l'instant t , il se positionnera en P_{-1} avec la probabilité $1/2$, ou en P_1 avec la probabilité $1/2$.

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, le point lumineux L est en P_0 .

- Déterminer les probabilités de chacun des trois événements suivants
 - De l'instant $t = 0$ à l'instant $t = n$ inclus, le point lumineux ne s'est positionné ni en P_{-2} , ni en P_2 .
 - De l'instant $t = 0$ à l'instant $t = n$, $n > 0$, le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-1} et il se positionnera en P_2 pour la première fois à l'instant $t = n$.
 - Le point lumineux ne s'est jamais positionné en P_{-2} avant de se positionner en P_2 pour la première fois.
- On désigne par X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur l'abscisse du point lumineux à l'instant $t = n$.
 - Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_i pour $i = 0; 1; 2; 3; 4$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance des variables aléatoires X_i pour $i = 0; 1; 2; 3; 4$.
 - Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_3, X_4) .
- Déterminer la loi de probabilité de $X_n + 1$ en fonction de la loi de probabilité de X_n .

- (b) On désigne par a_n la probabilité de l'événement $(X_n = 0)$. Etablir une relation de récurrence de la forme $\alpha a_{n+2} + \beta a_n + \gamma a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$.
- (c) Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles vérifiant la relation de récurrence

$$\alpha u_{n+1} + \beta u_n + \gamma u_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$$

- (d) En déduire a_n . Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Problème 2

On désire étudier sur un certain nombre d'années les mouvements migratoires d'une population lors des vacances d'été.

L'observation de cette population a conduit à la construction d'un modèle mathématique dont les hypothèses sont les suivantes :

Hypothèse 1 Le territoire sur lequel évolue la population durant les vacances d'été est divisé en trois régions, notées 1, 2, 3.

Hypothèse 2 Chaque année, tout individu de la population étudiée choisit une région et une seule pour y passer toutes ses vacances d'été.

Hypothèse 3 Le choix d'une région par un individu pour y passer ses vacances d'été est un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps à partir d'une année initiale appelée année 1.

On note $A_i(n)$, pour i élément de $\{1; 2; 3\}$ et $n \geq 1$, l'événement : " choisir la région i pour y passer ses vacances d'été, l'année n " et $\alpha_1(n) = P(A_1(n))$, $\alpha_2(n) = P(A_2(n))$, $\alpha_3(n) = P(A_3(n))$ les probabilités de choisir l'année n , respectivement les régions 1 , 2, 3 pour y passer ses vacances d'été.

Hypothèse 4 $\alpha_1(1) = 0,2$; $\alpha_2(1) = 0,45$; $\alpha_3(1) = 0,35$

Hypothèse 5 La probabilité de choisir la région i , $1 \leq i \leq 3$ pour y passer ses vacances l'année $n+1$ ne dépend que du choix effectué l'année n .

On note $a_{i,j} = P(A_i(n+1)/A_j(n))$ la probabilité de choisir la région i l'année $n+1$, sachant que l'année n , on a choisi la région j .

On suppose que, quels que soient i, j éléments de $\{1; 2; 3\}$, $a_{i,j}$ est indépendant de l'année considérée et que les $a_{i,j}$ sont les éléments de la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Hypothèse 6 On suppose que la population étudiée reste inchangée durant toutes les années prises en considération dans ce modèle.

1. (a) Soit B_n , l'événement " choisir chaque année la région 2 durant les n premières années ".
Calculer la probabilité $P(B_3)$ de l'événement B_3 .
Exprimer la probabilité $P(B_n)$ de l'événement B_n en fonction de n .
- (b) Sachant qu'un individu choisit la région 1 l'année 2, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la région 2 l'année 1 ?
- (c) Calculer la probabilité pour qu'un individu change de région entre la première année et la deuxième année.

2. (a) Exprimer, en la justifiant, une relation entre les matrices $\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix}$ puis entre les

$$\text{matrices } \begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix}$$

(b) Calculer le déterminant de la matrice M .

(c) Calculer, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les valeurs propres de M .

(d) Montrer que, pour tout naturel n supérieur ou égal à 1, la matrice M^n s'écrit sous la forme $M^n =$

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

où λ est un élément de $\mathbb{C}$ de module strictement intérieur à 1, $\bar{\lambda}$ son conjugué.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix} \text{ est une matrice inversible à éléments complexes}$$

(on ne cherchera pas à déterminer la valeur des éléments des deux dernières colonnes de P),

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \text{ est la matrice inverse de } P$$

(on ne cherchera pas ici à calculer la valeur des éléments de P^{-1}).

3. On dit qu'une suite de matrices $(U_n)_{n \geq 1}$ de type $(m \times q)$ à éléments dans $\mathbb{C}$ converge vers une matrice L de type $(m \times q)$ quand n tend vers l'infini si et seulement si quels que soient i, j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q$, la suite $u_{i,j}(n)$ des éléments de la i -ième ligne et la j -ième colonne des matrices U_n converge vers l'élément $\ell_{i,j}$ de L , lorsque n tend vers l'infini.

On note alors $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

On admettra le résultat suivant :

Etant donné une suite (U_n) de matrices de type $(m \times q)$ à éléments dans $\mathbb{C}$ qui converge vers la matrice L , lorsque n tend vers l'infini et V, W deux matrices telles que les produits $V.L$ et $L.W$ soient définis, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V.U_n = V.L \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.W = L.W$$

(a) Montrer que la suite de matrices $(M^n)_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

(b) Soient $U = (u_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ et $V = (v_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ deux matrices telles que la somme des éléments de chaque colonne de chacune d'elles soit égale à 1.

Montrer qu'il en est de même pour la matrice $U.V$.

(c) Dédire de ce qui précède les valeurs des éléments a, a', a'' de la matrice P^{-1}

(d) Montrer que les suites $(\alpha_1(n))_{n \geq 1}$, $(\alpha_2(n))_{n \geq 1}$ et $(\alpha_3(n))_{n \geq 1}$, convergent.

Calculer leurs limites.