

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1981

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les trois parties sont indépendantes.

Partie I

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{e}(1+t)^{\frac{1}{e}+\frac{1}{2}} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. (a) Etablir le développement limité de $\ln(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
En déduire que la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.
(b) Montrer que f est continue et dérivable en 0.

2. Soit φ la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(1+t - \frac{1}{1+t}\right) - \ln(1+t).$$

- (a) Etablir, pour $t \neq 0$, l'égalité :

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} \cdot \varphi(t) \cdot f(t).$$

- (b) En déduire que f' est continue sur $] -1, +\infty[$.
- (c) Etudier le signe de $\varphi(t)$ pour $t \in] -1, \infty[$.
- (d) En déduire :

$$\forall t \in] -1, +\infty[\quad f(t) \geq 1.$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(nx)^n \cdot n^{1/2}}{n!}$ pour $n \geq 1$.

- (a) Vérifier, pour $x > 0$, l'égalité $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e \cdot x \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$.

- (b) Etudier la convergence de cette série suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$.

- (c) En déduire les limites des deux suites $v_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot \frac{n^{1/2}}{n!}$ et $w_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{2}\right)^k \cdot \frac{k^{1/2}}{k!}$.

(d) Etablir successivement les inégalités suivantes pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

$$\ln(f(t)) \leq \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$$

(e) En utilisant **3.a.**, établir la majoration :

$$\forall n \geq 2 \quad \ln(u_n(\frac{1}{e})) \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{k^2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k^3})$$

et en déduire que la suite $(u_n(\frac{1}{e}))_{n \geq 1}$ est majorée.

(f) En déduire la limite de la suite $(\frac{n^n \cdot e^{-n}}{n!})_{n \geq 1}$.

Partie II

Pour tout entier naturel n , on définit le polynôme de $\mathbb{C}$:

$$Q_n(X) = \frac{1}{2i} [(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}]$$

1. Déterminer le degré de Q_n .
2. Pour tout entier naturel r , montrer que

$$Q_{2r}(X) = \sum_{p=0}^r (-1)^p C_{2r+1}^{2p+1} X^{2r-2p} \quad (1)$$

3. (a) Déterminer les racines de Q_n . Montrer que ces racines sont réelles.
(b) En déduire la décomposition de Q_n en produit de polynômes du premier degré.
4. Pour tout entier naturel r , montrer que

$$Q_{2r}(X) = (2r+1) \prod_{k=1}^r (X^2 - \cotan^2 \frac{k\pi}{2r+1}). \quad (2)$$

5. En utilisant (1) et (2), établir l'égalité

$$\sum_{k=1}^r \cotan^2 \frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$$

(On calculera de deux façons le coefficient de X^{2r-2} dans Q_{2r} .)
En deduire l'égalité

$$\sum_{k=1}^r \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2r+1}} = \frac{2r(r+1)}{3}$$

(On calculera de deux façons le coefficient de X^{2r-2} dans Q_{2r}).

6. (a) Pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, établir les inégalités:

$$\cotan^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$$

- (b) En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^r \frac{1}{(\frac{k\pi}{2r+1})^2}$.

- (c) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente et calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Partie III

Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement supérieur à -1 , on pose

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

1. Montrer que F_n est définie et continue sur $] -1, +\infty[$. Etudier son sens de variation. Montrer que F_n admet des limites en -1 et $+\infty$ et calculer ces limites.

2. Soit x fixé, avec $x > 0$. Montrer que : $\forall t \in [0, x] \quad \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \leq \frac{x^n}{(1+x)^n}$.

on pourra comparer d'abord $\frac{t}{1+t}$ et $\frac{x}{1+x}$.

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit x fixé, avec $-\frac{1}{2} < x < 0$. Montrer que :

$$\forall t \in [x, 0], \quad \left| \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \right| \leq \left| \frac{x}{1+x} \right|^n$$

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.