

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1980

MATHEMATIQUES

2ème épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, p est un réel donné appartenant à l'intervalle ouvert $]0; 1[$; on note $q = 1 - p$.
On désigne par a et b deux nombres réels, solutions du système (1) suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} a + b = q \\ ab = -pq \end{cases}$$

Préliminaires

1. Montrer que le système (1) admet une solution (a, b) telle que :

$$a \neq b, \quad |a| < 1, \quad |b| < 1.$$

Montrer que a ou b peut être égal à p et déterminer alors numériquement a , b , p .

2. Montrer que quel que soit p , le système (S) suivant, où n désigne un entier naturel, admet au moins une solution (x, y, z) .

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^n \\ x + by + b^2z = b^n \\ x + py + p^2z = p^n \end{cases}$$

Montrer que toute solution vérifie $y + qz = \frac{a^n - b^n}{a - b}$.

Partie I

On note :

$\mathbb{R}[X]$ l'algèbre sur $\mathbb{R}$ des polynômes à coefficients réels,

$\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre 3 réelles.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ définie par :

$$(2) \quad \begin{aligned} &u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = q \\ &\forall n \in \mathbb{N}^\times; u_{n+3} = u_{n+2} - p^2qu_n \end{aligned}$$

On note V_n , la matrice colonne $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et A la matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -p^2q & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, V_{n+1} = AV_n$ puis que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times \setminus \{1\}, V_n = A^{n-1}V_1$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique P_A de la matrice A .
Montrer que les valeurs propres de A sont a, b et p .
La matrice A est-elle diagonalisable quel que soit p ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $R_n = \alpha_n + \beta_n X + \gamma_n X^2$ le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme caractéristique P_A de la matrice A .
Montrer que $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ est solution du système (S) défini dans la question 2 des préliminaires.
4. On désigne par Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \quad (n \text{ étant le degré de } P)$$

a pour image par Φ la matrice :

$$\Phi(P) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n, \text{ où } I \text{ désigne la matrice unité de } \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Montrer que Φ est linéaire et que $\Phi(PQ) = \Phi(P)\Phi(Q)$ quels que soient P et Q , éléments de $\mathbb{R}[X]$.
- (b) Vérifier que $\Phi(P_A) = 0$ (P_A polynôme caractéristique de A), où 0 désigne l'élément neutre de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
- (c) En déduire successivement :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n &= \alpha_n I + \beta_n A + \gamma_n A \\ \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad V_n &= \alpha_{n-1} V_1 + \beta_{n-1} V_2 + \gamma_{n-1} V_3 \\ (3) \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n &= \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b} \end{aligned}$$

Partie II

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^\times}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même loi, telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad P(X_k = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = 1 - p = q$$

La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^\times}$ s'interprète comme une suite d'épreuves se soldant par un succès ($X_k = 1$) ou par un échec ($X_k = 0$).

On signale que la question 3. est indépendante des questions 1. et 2.

1. (a) On définit la variable aléatoire Z_2 : nombre d'échecs précédant le deuxième succès.
Calculer, pour $n \geq 2$, la probabilité de l'événement : $(Z_2 = n - 2)$.
(On remarquera qu'il s'agit de l'événement : " obtenir le deuxième succès à la n -ième épreuve ").
- (b) Etant donné un entier naturel $r \geq 2$, on considère la variable aléatoire Z_r : " nombre d'échecs précédant le r -ième succès ". Calculer, pour $n \geq r$, la probabilité de l'événement $(Z_r = n - r)$.
2. On définit les r variables aléatoires suivantes :
 Y_1 : nombre d'échecs précédant le premier succès,
 Y_2 : nombre d'échecs obtenus entre le premier et le second succès,
etc ...
 Y_r : " nombre d'échecs entre le $(r - 1)$ -ième succès et le r -ième succès ".
- (a) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité s_k de l'événement $(Y_1 = k)$.
Vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k = 1$.
- (b) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'événement $(Y_2 = k)$.
Exprimer la variable aléatoire Z_r , (définie dans 1.b) en fonction de $Y_1, Y_2, \dots, Y_r$.
- (c) En déduire l'espérance mathématique et la variance de Z_r .

3. Si dans une suite d'épreuves on obtient deux succès consécutifs, on dit que l'on a réalisé un " doublé ".
 n étant un entier naturel, on considère les événements suivants :
 A_n est l'événement : " le premier double est obtenu par un succès à la $(n-1)$ -ième épreuve et un succès à la n -ième épreuve ".
 C'est aussi l'événement :

$$(X_{n-1} = 1 \text{ et } X_n = 1) \quad \text{et} \quad [(\forall k \in \mathbb{N}^\times), (k < n) \implies (X_{k-1} = 0 \text{ ou } X_k = 0)].$$

B_n est l'événement : " un doublé au moins est réalisé dans les n premières épreuves ".
 C'est aussi l'événement :

$$(\exists k \in \mathbb{N}^\times), (k \leq n) \quad \text{et} \quad (X_{k-1} = 1 \text{ et } X_k = 1).$$

On désigne par p_n la probabilité de l'événement A_n , et on pose $p_1 = 0$.

- (a) Calculer p_2 et p_3 .

Montrer que la probabilité de l'événement B_n est $\sum_{k=1}^n p_k$.

En déduire la relation : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad p_{n+3} = p^2 q [1 - \sum_{k=1}^n p_k]$

- (b) Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est solution de l'équation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_{n+3} = u_{n+2} - p^2 q u_n$$

En utilisant les résultats de **3.a** et la relation (3) de la partie **I**, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad p_n = p^2 \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a - b}$$