EDHEC

School of management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Année 1996

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

EXERCICE 1

On considère la suite (d_n) définie par

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 0 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N},^{\times} \quad d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}).$$

1. (a) Calculer d_2, d_3, d_4 et d_5.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n \in \mathbb{N},.$
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},, \quad d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$.
3. On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^t \, dt$.
   (a) Calculer I_0, puis exprimer, pour tout entier naturel n, I_{n+1} en fonction de I_n.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad ed_n = n![1 + (-1)^n I_n]$.
   (c) Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| d_n - \dfrac{n!}{e} \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (d) Vérifier que cette dernière inégalité détermine parfaitement d_n pour $n \geqslant 2$, puis retrouver la valeur de d_5 obtenue à la deuxième question et calculer d_{10}.

EXERCICE 2

Partie I

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit de plus la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. Exprimer J^2, puis pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, J^n en fonction de J.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n : $M^n = \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J$.

Partie II

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$, soit il y reste, avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note A_n l'événement : “ le mobile se trouve en A à l'instant n ”.
B_n l'événement : “ le mobile se trouve en B à l'instant n ”.
C_n l'événement : “ le mobile se trouve en C à l'instant n ”.
On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Pour tout n entier naturel, déterminer $a_n + b_n + c_n$.

2. (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n) \quad \text{et} \quad a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n).$$

3. On suppose, dans cette question seulement, que le mobile se trouve en A à l'instant 0.
   (a) Calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   (b) Vérifier que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ est la première colonne de M^n.
   (c) Démontrer ce résultat.

4. Expliquer comment retrouver, grâce à une méthode analogue à celle employée dans la troisième question, les deux autres colonnes de M^n (aucun calcul n'est demandé).

EXERCICE 3

1. Montrer que : $\forall t > 0 \quad \ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x)$.
   (a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
   (b) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

3. (a) Pour tout réel x, vérifier que : $f(x) = 1 - f'(x) - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
En déduire, en fonction de f, une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que l'intégrale impropre $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et donner sa valeur.

4. Soit α un réel et g la fonction définie par : $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $g(x) = \alpha f(x)$ si $x \geqslant 0$.
Déterminer α pour que g puisse être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.

PROBLEME

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^\times$, par $f(x) = x - \ln x$.

1. Etudier f et résumer cette étude par un tableau de variations.

2. Etudier le signe de $f(x) - x$, pour tout réel x strictement positif.

Partie II

On considère l'algorithme suivant :

```
Program iter ;
Var n, k : integer ;
a, u, p : real ;
Function f(x :real) : real ;
Begin
If x > 0 then f := x - ln(x) ;
End ;
Begin
Readln(n, a) ; u := a ; p := a ;
For k := 1 to n do begin
                    u := f(u) ;
                    p := p*u ;
                  end ;
Writeln(u, p) ;
End.
```

1. Dans le cas particulier où $n = 3$ et $a = 2$, donner les valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut des contenus des variables $u$et p à la fin de l'algorithme.
Dorénavant, dans le cas général, on note u_n et p_n les contenus respectifs des variables $u$et p à la fin de l'algorithme, lorsque leur calcul est possible.

2. (a) Pour quelles valeurs de a, peut-on définir la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont le premier terme est $u_0 = a$, et dont le terme général u_n est calculé par l'algorithme précédent ?

   (b) Pour les valeurs de a trouvées ci-dessus, donner en fonction de n le nombre d'appels de fonction utilisés au cours de cet algorithme, ainsi que le nombre de soustractions, de multiplications et d'affectations nécessaires au calcul de u et de p.
NB : le symbole **:=** utilisé dans l'écriture " **for k := 1 to n** " ne sera pas considéré comme une affectation, mais chaque appel de fonction nécessite une affectation (**f :=**) et une soustraction.

3. Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est bien définie, écrire, pour tout entier naturel n, la relation liant u_{n+1} et u_n.

4. Pour quelle valeur de a la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est-elle constante ?

5. On suppose, dans cette question, que $a > 1$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n > 1$.

(b) Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N},}$.

(c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N},}$ converge et donner sa limite.

6. On suppose, dans cette question, que $0 < a < 1$.

   (a) Montrer que : $u_1 > 1$.

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N},}$ converge et donner sa limite.

Partie III

1. En considérant $\ln(p_n)$, exprimer p_n en fonction seulement de a et u_{n+1}, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

2. Ecrire alors un nouvel algorithme en Turbo Pascal, ne contenant aucune multiplication et permettant le calcul de p_n.

Partie IV

Dans cette partie, on choisit $a > 1$.

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \int\limits_{u_{n+1}}^{u_n} f(t)\,dt$.

1. Vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N},}$ est bien définie.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+2}\ln(u_n) \leqslant v_n \leqslant u_{n+1}\ln(u_n).$$

   (b) En déduire que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(u_n)$.