

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

---

**MATHEMATIQUES**

Option scientifique

**Année 1995**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

## **Exercice 1**

Preliminaire:

On rappelle que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$  signifie que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ :  $|u_n - a| \leq \varepsilon$ .

En déduire que si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle convergente de limite  $a$  strictement positive, alors il existe un entier  $n_0$  tel que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ :  $u_n \geq \frac{a}{2}$ .

Ce résultat peut être admis dans la suite de l'exercice.

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = x(1-x)$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la donnée de  $u_0$  élément de  $]0, 1[$  et de la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Etudier les variations de  $f$ .
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$  et en déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
(b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = nu_n$ .  
Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.  
En déduire qu'elle converge et que sa limite  $L$  appartient à  $]0, 1[$ .  
(c) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ .  
Montrer que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et que sa limite vaut  $L(1-L)$ .
3. On suppose que  $L \neq 1$ .  
Montrer en utilisant le préliminaire qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad v_{n+1} - v_n \geq \frac{L(1-L)}{2n}$$

En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

4. Montrer à l'aide de la question 2b que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

## Exercice 2

1.  $E$  désigne un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $n$ , ( $n \geq 2$ ).

On note  $i$  l'endomorphisme identité de  $E$  et  $\theta$  l'endomorphisme nul de  $E$ .

Soit  $s$  un endomorphisme involutif de  $E$ , c'est-à-dire  $s \circ s = i$ .

(a) Justifier que  $s$  est bijectif et définir  $s^{-1}$ .

(b) Déterminer les seules valeurs propres possibles de  $s$ .

On suppose dans la suite de cette partie que  $s \neq i$  et  $s \neq -i$ .

(c) i. Montrer que  $(s - i) \circ (s + i) = \theta$ .

ii. En déduire que  $-1$  et  $1$  sont les valeurs propres de  $s$ .

(d) Montrer que  $E = \ker(s - i) \oplus \ker(s + i)$ .

(On montrera dans un premier temps que si pour tout  $x$  de  $E$  on a  $x = u + v$  avec  $u$  élément de  $\ker(s - i)$  et  $v$  élément de  $\ker(s + i)$  alors nécessairement  $s(x) = u - v$ .)

$s$  est appelée la symétrie par rapport à  $\ker(s - i)$  parallèlement à  $\ker(s + i)$ .

2. Etude d'un exemple.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désignant l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ , on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Si  $M$  est la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont  $m_{i,j}$  est l'élément de  $i^{\text{ième}}$  ligne et de la  $j^{\text{ième}}$  colonne, avec  $i$  et  $j$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on rappelle que:

$M$  est symétrique si et seulement si pour tout  $(i, j)$ ,  $m_{i,j} = m_{j,i}$ .

$M$  est antisymétrique si et seulement si pour tout  $(i, j)$ ,  $m_{i,j} = -m_{j,i}$ .

Dans la suite,  ${}^tM$  désigne la matrice transposée de  $M$ .

(a) Vérifier que  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{A}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(b) Montrer que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$ .

(c) On note  $T$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui à chaque matrice associe sa transposée, montrer que  $T$  est une symétrie par rapport à  $\mathcal{S}$  parallèlement à  $\mathcal{A}$ .

## Exercice 3

Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $\lambda$  un réel strictement positif.

1. (a)  $j$  et  $k$  désignant des entiers naturels,  $a_{k,j}$  des réels tels que pour tout  $j$  la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$  soit convergente,

montrer que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^n a_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,j}$ .

(b) Soient  $X$  une variable aléatoire prenant des valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $S$  une variables aléatoires à valeurs dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

Pour tout  $k$  élément de  $\mathbb{N}$ , on définit  $l'$  espérance conditionnelle de  $S$  sachant  $X = k$  par:

$$E(S/X = k) = \sum_{j=0}^n jP(S = j/X = k)$$

Montrer, en utilisant la première question que  $E(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} E(S/X = k)P(X = k)$ .

2. Un ascenseur désert  $n$  étages d'un immeuble. A chaque voyage le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez de chaussée est un variable aléatoire  $X$  suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On émet les hypothèses suivantes:

- Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez de chaussée.
- Chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers. (Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur).

Enfin, pour tout entier naturel  $k$ , on appelle  $S_k$  la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur lorsque celui-ci contient  $k$  passagers au départ.

- (a) Montrer que pour tout  $j$  appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et pour tout entier naturel  $k$ :

$$P(S_{k+1} = j) = \frac{j}{n} P(S_k = j) + \frac{n-j+1}{n} P(S_k = j-1)$$

- (b) En déduire que  $E(S_{k+1}) = 1 + (1 - \frac{1}{n})E(S_k)$ .
- (c) Après avoir justifié que  $E(S_0) = 0$ , déterminer  $E(S_k)$  pour tout entier naturel  $k$ .
- (d) Montrer que si  $S$  désigne une variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur à un voyage donné alors:

$$E(S) = n(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})$$

## Problème

$p$  et  $n$  désignent deux entiers naturels non nuls.

1. On pose  $u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$ ,  $v_n = \sum_{p=1}^n u_p$ .

- (a) i. Prouver que pour tout  $p$  supérieur ou égal à 1:  $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ .
- ii. En déduire que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante puis prouver qu'elle converge et que sa limite  $\gamma$  est élément de  $[0, 1]$ . On note maintenant  $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$ .

- (b) i. Montrer que pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 1:  $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x}{p+x} dx$ .
- ii. En déduire que pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 2:  $\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \leq u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p})$ .
- iii. A l'aide de cette dernière question, établir que  $\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}$ .

- (c) Déterminer un entier  $n$  tel que  $v_n$  soit une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-5}$  près.

2. Dans cette partie,  $k$  désigne un entier supérieur ou égal à 1.

On pose, pour tout réel  $t$  strictement positif:  $f_0(t) = \frac{1}{t}$  et  $f_k(t) = \frac{1}{t(t+1) \dots (t+k)}$ .

- (a) Montrer que  $f_{k-1}(t) - f_{k-1}(t+1) = k f_k(t)$ .

- (b) En déduire que  $\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{n!}{k(n+k)!}$ .

3. On note  $P_k$  le polynôme défini par:  $P_1(t) = t$  et pour tout  $k$  supérieur ou égal à 2,

$$P_k(t) = t(1-t)(2-t) \cdots (k-1-t)$$

On pose d'autre part  $a_k = \int_0^1 P_k(t) dt$ .

(a) i. Vérifier que pour tout  $x$  positif:  $\frac{1}{p+x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \times \frac{1-x}{p+x}$ .

ii. En déduire que  $u_p = \frac{1}{2p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)} \int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x} dx$ .

(b) i. Montrer que pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 1, et pour tout réel  $x$  positif:

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+x)(p+k)}$$

ii. En déduire par récurrence sur  $k$  que

$$u_p = \frac{a_1}{p(p+1)} + \frac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{a_k}{p(p+1) \cdots (p+k)} + \frac{1}{p(p+1) \cdots (p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx$$

iii. Montrer que pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 2:  $0 \leq \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} dx \leq \frac{a_{k+1}}{p-1}$ .

iv. En déduire en utilisant la partie 2, que pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 1 et pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1:

$$r_n = \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{a_k}{k(n+1)(n+2) \cdots (n+k)} + r_{n,k}$$

avec  $0 \leq r_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1) \cdots (n+k)}$ .

v. Construire une suite  $(v_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$  de limite  $\gamma$  telle que  $0 \leq \gamma - v_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1) \cdots (n+k)}$ .

(c) i. Calculer  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .

ii. Déterminer un entier  $n_0$  tel que  $v_{n_0,3}$  soit une valeur approchée de  $\gamma$  à  $10^{-5}$  près.

iii. Ecrire en Turbo-Pascal, un algorithme permettant le calcul de  $v_{n_0}$ , puis de  $v_{n_0,3}$ .

iv. Donner une valeur de  $\gamma$  à  $10^{-5}$  près.