ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
EDHEC / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen

CONCOURS D'ADMISSION

option économique

MATHÉMATIQUES

Année 1990

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE 1

On considère une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur le corps des réels et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = ae_1 \quad ; \quad f(e_2) = ae_2 + be_1 \quad ; \quad f(e_3) = ae_3 + be_2 + ce_3,$$

où a, b, c sont trois réels fixés.

$$\text{On pose } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Ecrire la matrice $M(a, b, c)$ de f relativement à la base B.
   (b) On appelle F l'ensemble de toutes les matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels quelconques. Démontrer que F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que tout élement de F se décompose de manière unique comme combinaison linéaire de I, J, K.

2. (a) Calculer les matrices J^2, K^2, JK, KJ.
   En déduire que F est stable pour la multiplication des matrices.
   (b) Déterminer les éléments de F qui sont inversibles et donner l'inverse d'une telle matrice.

3. On note M pour $M(a, b, c)$.
   (a) Démontrer qu'il existe trois suites réelles $(x_n), (y_n), (z_n)$ telles que

$$M^n = x_n I + y_n J + z_n K \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = ax_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \\ z_{n+1} = cx_n + by_n + az_n \end{cases}$$

   (b) Déterminer x_n en fonction de n. On suppose désormais $a \neq 0$.
   (c) On pose $u_n = \dfrac{y_n}{x_n}$. Déterminer u_n, puis y_n en fonction de n.
   (d) En déduire la valeur de z_n.

EXERCICE 2

A- On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

1. Etudier la fonction g.
2. Construire la courbe représentative (C) dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ orthogonal.
   (On prendra comme unité graphique 2 cm en abscisses et 4 cm en ordonnées.
3. On pose $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \, dx$.
   (a) Démontrer que I est une intégrale convergente.
   (b) Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t+1)^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$.
   (c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

(d) En déduire que $I = 2 + \sqrt{2\pi}$.

B- On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = & A^2 e^{-\dfrac{(x-1)^2}{2}} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = & 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de A pour que la fonction f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2. Déterminer alors la probabilité $P(X \leqslant 2)$. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
   N.B. Des tables relatives à la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ sont fournies en annexe au sujet.

PROBLEME

La société MARSCHA réalise auprès de sa clientèle une étude statistique relative au lancement d'un nouveau produit référencé A.
L'observation des ventes permet d'admettre que chaque client achètera le produit A, avec la probabilité $0,5$ et que les achats des clients sont mutuellement indépendants.
On considère un échantillon de n clients susceptibles d'acheter le produit A, et on appelle X_n le nombre de clients, parmi les n interrogés, qui achèterons effectivement le produit A.
On pose $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

Première partie - A

1. (a) Préciser la loi de X_n. Quel est l'ensemble des valeurs prises par F_n ?
   (b) Calculer $P(F_n = 1 - \dfrac{1}{n})$.
   (c) Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

2. Trouver à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, le plus petit entier n tel que :

$$P\left[|F_n - 0,5| \geqslant 0,20\right] < 0,05.$$

Deuxième partie - B

L'objet de cette partie du problème est la recherche d'une autre majoration de

$$P\left[|F_n - 0,5| \geqslant a\right], \text{ où } 0,5 > a > 0.$$

1. On considère un entier naturel non nul m, un réel t tel que $0,5 \leqslant t \leqslant 1$ et la fonction f définie, pour x positif ou nul, par :

$$f(x) = \left(e^{-tx} + e^{(1-t)x}.\right)^m.$$

   (a) Placer $\dfrac{t}{1-t}$ par rapport à 1.
   (b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ et construire son tableau de variation. On appelera b le minimum de f sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que l'on a $f(x) = e^{-mtx}(1 + e^x)^m$.
   (d) En déduire que $b = \left(\dfrac{1}{t^t(1-t)^{1-t}}\right)^m$.

2. Soient $m \in \mathbb{N}^{\times}$, $t \in [0,5;1[$. On note r le plus petit entier strictement supérieur à mt.
On pose $S = \sum\limits_{k=r}^{m} C_m^k$.

   (a) Montrer que si k est un entier supérieur ou égal à r et si x est un réel positif ou nul, on a :
$$e^{x(k-mt)} \geqslant 1.$$

   (b) En déduire que, si x est positif ou nul, on a : $S < \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k e^{x(k-mt)}$.

   (c) Démontrer alors que, pour tout réel x positif ou nul, on a $S < e^{-mtx}(1+e^x)^m$.

   (d) On pose, pour tout t tel que $0,5 \leqslant t < 1$, $\quad g(t) = t\ln t + (1-t)\ln(1-t)$.
Montrer que $S < e^{-mg(t)}$.
On pourra utiliser le **B**-1.(d)

3. Soit a un réel positif, inférieur à $0,5$ et n un entier non nul.
On note u le plus petit entier supérieur à $(a+0,5)n$ et v le plus grand entier inférieur à $(0,5-a)n$.

   (a) Montrer que $\sum\limits_{i=u}^{n} C_n^i = \sum\limits_{j=0}^{v} C_n^j$.

   (b) Montrer que $[|F_n - 0,5| > a] = [X_n > n(a+0,5)] \cup [X_n < (0,5-a)n]$.

   (c) En déduire que $P\left[|F_n - 0,5| > a\right] = (0,5)^{n-1} \sum\limits_{i=u}^{n} C_n^i$.

   (d) Conclure que $P\left[|F_n - 0,5| > a\right] < e(n)$ avec $e(n) = (0,5)^{n-1} e^{-ng(a+0,5)}$, g étant définie au **B**-2.(d)

4. On pose $\begin{cases} w(t) = g(t) & \text{si } t \in [0,5;1[\\ w(t) = 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$
Etudier la fonction w sur $[0,5;1]$. Préciser la tangente au point $A(1,0)$ à la courbe $C(w)$ représentative de w. Tracer la courbe $C(w)$.

5. (a) Déduire du 3.(d) et du 4. que la limite de $P\left[|F_n - 0,5| > a\right]$ est nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

   (b) Exprimer en fonction de a, la valeur du plus petit entier n pour que $e(n) \leqslant 0,05$. On appellera n_1 cet entier naturel.
Calculer n_1 si $a = 0,20$.

6. Il semble donc que les conditions d'approximation de la loi de X_n par une loi normale soient remplies.

   (a) Préciser les paramètres de la loi normale approchant celle suivie par X_n.

   (b) En utilisant l'approximation précédente, déterminer le plus petit entier n_2 tel que $P\left[|F_n - 0,5| > 0,2\right] \leqslant 0,05$.