

ECRI COME

CONCOURS D'ADMISSION

option économique et technologique

MATHÉMATIQUES

Année 1988

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

EXERCICE DE MATHEMATIQUES

Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $B = (e_1, e_2, e_3)$; on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relativement à la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A n'admet comme valeur propre que le réel $\lambda = 2$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associées à $\lambda = 2$.

3. On pose
$$\begin{cases} e'_1 = & e_2 & + & e_3 \\ e'_2 = & e_1 & & + & e_3 \\ e'_3 = & e_1 & + & e_2 \end{cases}.$$

Montrer que la matrice A' de f relativement à la nouvelle base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. On écrit $A' = 2I + J$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A'^n puis A^n .

5. Applications : déterminer en fonction de n les valeurs de x_n, y_n, z_n définis par

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1 \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases}$$

EXERCICE DE STATISTIQUES-PROBABILITES

Dans un hopital de la région parisienne, le nombre d'admis dans le service des urgences, au cours du samedi est une variable aléatoire X de distribution

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,22	0,33	0,25	0,13	0,05	0,02

La probabilité que la personne admise soit un homme est 0,3. Soit Y la variable aléatoire "nombre d'hommes admis dans le service des urgences au cours de la nuit du samedi".

1. Quelle est la loi conditionnelle de Y pour $X = x_i$?
2. En déduire $P(Y = 4)$ à 10^{-4} près.
3. Si, un samedi donné, il n'y a que trois lits disponibles pour les hommes et deux pour les femmes, quelle est la probabilité de refuser un ou plusieurs patients hommes ou femmes ?
4. Déterminer la loi de Y en supposant que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,5$.

Problème

Les parties A et B sont largement indépendantes.

Ce problème étudie, à partir de différentes hypothèses, la probabilité pour qu'une personne donnée soit retenue à la suite d'une offre d'emploi.

La notation $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Première Partie -A

Une entreprise souhaite recruter un responsable pour son service commercial. Un certain nombre de personnes se présentent à la suite de cette offre. L'ordre des convocations pour l'entretien se fait au hasard. Pour diverses raisons, il a décidé que le premier candidat qui, au cours des ces entretiens, présenterait les qualités requises, serait immédiatement embauché.

Le nombre de personnes candidates à ce poste, convoquées et ayant les qualités exigées est une variable aléatoire X .

On considère que les ordres de passage de ces candidats "embauchables" devant la commission de recrutement sont équiprobables.

Enfin, dans tout le problème, on nomme A une personne ayant toutes les qualités pour être embauchée, et faisant partie des personnes convoquées.

1. On suppose dans cette question que X peut prendre comme valeur tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq N$, N étant un entier fixé, toutes ces valeurs étant équiprobables.

(a) Montrer que la probabilité α_N pour que A soit embauchée est donnée par

$$\alpha_N = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\right) \times \frac{1}{N}.$$

(b) Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

pour obtenir un encadrement de α_N .

En déduire la limite de α_N lorsque $N \rightarrow +\infty$.

2. On suppose dans cette question que X peut encore prendre comme valeur tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq N$, sa loi étant définie par

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{C}{k^r}$$

où r est un réel supérieur ou égale à 1, et C une constante réelle.

(a) A quelle condition doit satisfaire la constante C ?

(b) Montrer que la probabilité β_N pour que A soit embauchée est donnée par :

$$\beta_N = \frac{1 + \frac{1}{2^{r+1}} + \cdots + \frac{1}{N^{r+1}}}{1 + \frac{1}{2^r} + \cdots + \frac{1}{N^r}}.$$

(c) On considère la suite (u_N) , $N \in \mathbb{N}^\times$ définie par $u_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^r}$.

En utilisant, comme en 1.b), l'inégalité pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^r} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^r} \leq \frac{1}{k^r}$$

discuter, selon la valeur de r , l'existence d'une limite pour u_N quant N tend vers $+\infty$.

En déduire le comportement de β_N quand N tend vers $+\infty$.

3. On suppose dans cette question que le nombre $X - 1$ de personnes autres que A suit une loi de Poisson de paramètre λ .

- (a) Exprimer la probabilité pour que A soit embauchée.
 (b) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^\times$ par

$$\varphi(\lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

- i. Montrer que φ se prolonge en une fonction continue $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$.
- ii. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et calculer φ' .
Etudier la dérivabilité de $\tilde{\varphi}'$ en 0.
- iii. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = e^t - 1 - t$.
Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, h(t) \geq 0$. Résoudre l'équation $h(t) = 0$.
- iv. Etudier le signe de φ' , puis dresser le tableau de variations de $\tilde{\varphi}$.
Construire la courbe représentative de $\tilde{\varphi}$.

Deuxième partie -B

Cette seconde partie précise les résultats obtenus en A en étudiant notamment le comportement asymptotique de α_N quand N tend vers $+\infty$, et celui de β_N dans le cas $r = 2$.

1. (a) Soit (x_N) et (y_N) les suites définies par

$$\begin{aligned} x_N &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N \text{ où } N \in \mathbb{N}^\times \\ y_N &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N+1) \text{ où } N \in \mathbb{N}^\times \end{aligned}$$

Montrer que (x_N) et (y_N) sont monotones.

En déduire leur convergence vers une même limite L .

- (b) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^\times, 0 < L - y_N < \frac{1}{N}$.

En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près.

- (c) Montrer alors que la probabilité α_N peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_N = \frac{\ln N}{N} + \frac{L}{N} + \frac{\varepsilon(N)}{N}$$

où $\varepsilon(N)$ vérifie $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varepsilon(N) = 0$.

2. Cette question étudie le comportement de β_N , dans le cas $r = 2$, lorsque N tend vers $+\infty$.

- (a) Etude de $l_2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} \right)$.

- i. On note $s_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$ et $r_{N+1} = l_2 - s_N = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Etablir que $0 \leq r_{N+1} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

Déterminer une valeur N_1 de l'entier N à partir de laquelle s_N est une valeur approchée de l_2 à 10^{-3} près.

- ii. Etablir que : $\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq r_{N+1} \leq \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

En déduire que le réel s'_N défini par

$$s'_N = s_N + \frac{1}{2} \left(\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} + \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right)$$

est une valeur approchée de l_2 telle que

$$|s'_n - l_2| \leq \frac{1}{2} \int_N^{N+1} \frac{dt}{t^2}.$$

Déterminer une valeur N_2 de l'entier N à partir de laquelle s'_N est une valeur approchée de l_2 à 10^{-3} près.

iii. Calculer s'_{N_2} .

On précisera un algorithme simple permettant d'obtenir s'_N pour une valeur de N que cet algorithme laisserait au choix de l'utilisateur.

(b) Accélération de convergence :

i. On pose $u_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

En décomposant u_k sous la forme $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$, calculer $U_N = \sum_{k=1}^N u_k$, puis $U = \lim_{N \rightarrow +\infty} U_N$.

ii. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^\times$, $\frac{1}{k^2} = u_k + u'_k$ puis $s_N = U_N + U'_N$ où $U'_N = \sum_{k=1}^N u'_k$.

Quelle est la limite U' de U'_N , quand N tend vers $+\infty$?

Exprimer u'_k en fonction de k .

Après avoir étudié la monotonie sur $\mathbb{R}^\times$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2(t+1)}$, justifier :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2(t+1)} \leq u'_k \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

puis

$$\int_{N+1}^{N+p+1} \frac{dt}{t^2(t+1)} \leq \sum_{k=N+1}^{N+p} u'_k \leq \int_N^{N+p} \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

pour tout entier $p > 0$. En déduire comme en 2(a)ii. que

$$\tilde{U}_N = U'_N + \frac{1}{2} \left(\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t+1)} + \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t+1)} \right)$$

est une valeur approchée de U' telle que $|U' - \tilde{U}_N| \leq \frac{1}{2} \int_N^{N+1} \frac{dt}{t^2(t+1)}$.

iii. Montrer que $|U' - \tilde{U}_N| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{N^2(N+1)}$.

Déterminer une valeur de N_3 de l'entier N à partir de laquelle $\tilde{U}_N$ est une valeur approchée de U' à 10^{-3} près.

(c) i. Déterminer a, b, c trois constantes réelles telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}^\times, \quad \frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{c}{t+1}.$$

En déduire l'expression de $\tilde{U}_N$ en fonction de N .

ii. Calculer $\tilde{U}_{N_3}$, puis la valeur approchée de l_2 qui s'en déduit.

iii. En admettant qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de

$$l_3 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{N^3} \right)$$

soit $l_3 \simeq 1,202$, préciser la limite β_N dans le cas $r = 2$.