



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que -1 est une valeur propre de A et trouver un vecteur propre, noté V , associé à cette valeur propre.
- (b) Montrer que (V, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans cette base.
- (c) Montrer que si X est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, alors $f(X)$ est une combinaison linéaire de X et de V . En déduire que, dans toute base de $\mathbb{R}^3$ de la forme (V, V_2, V_3) où V_2 et V_3 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la matrice de f est la forme :

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des réels.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Plus généralement, soit U_1 un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ et h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant la propriété suivante :

(P) : Pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, $h(X)$ est une combinaison linéaire de X et de U_1 .

Soit (U_1, U_2, U_3) une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en adjoignant à U_1 deux autres vecteurs U_2 et U_3 .

- (a) En appliquant la propriété (P) à trois vecteurs particuliers, montrer qu'il existe des réels α, β, γ tels que :

$$h(U_2) = \alpha U_1 + \gamma U_2 \quad \text{et} \quad h(U_3) = \beta U_1 + \gamma U_3.$$

- (b) En déduire que la matrice de h dans la base (U_1, U_2, U_3) est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

où α, β, γ et λ sont des réels.

- (c) L'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

EXERCICE II

- Montrer que, si g est une fonction réelle définie sur $[0, 1]$, continue et positive sur cet intervalle, la fonction h , définie par $h(x) = 2 \int_0^x \sqrt{g(t)} dt$, est aussi une fonction continue et positive sur $[0, 1]$.
- Compte tenu du résultat précédent, on définit sur $[0, 1]$ une suite de fonctions réelles $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f_0(x) = 1, \quad \text{et pour tout } n \geq 1, \quad f_n(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f_{n-1}(t)} dt$$

Calculer f_1, f_2 et f_3 .

- Montrer qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in [0, 1]$, on ait : $f_n(x) = a_n x^{b_n}$.

On calculera b_n en fonction de n et on écrira une relation de récurrence donnant a_n en fonction de a_{n-1} .

- Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $2^n \ln(a_n) = - \sum_{k=1}^n 2^k \ln(1 - 2^{-k})$.

- (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $0 \leq -\ln(1 - x) - x \leq \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{1 - x}$

(b) En déduire que, pour tout $k \geq 1$, $|-2^k \ln(1 - 2^{-k}) - 1| \leq 2^{-k}$

(c) Montrer que $\ln(a_n)$ est équivalent à $\frac{n}{2^n}$ quand n tend vers l'infini.

- Montrer que, pour tout réel $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite en fonction de x .

EXERCICE III

Un pion est déplacé de manière aléatoire sur un damier de quatre cases numérotées de 1 à 4. On considère une suite de variables aléatoires, $(X_n)_{n \geq 0}$, définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) , à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, représentant la position du pion aux instants successifs : pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on a $X_n = i$ si le pion est sur la case i à l'instant n .

On note π_{ij} l'élément situé à la i -ème ligne et à la j -ième colonne de la matrice

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour i et j dans $\{1, 2, 3, 4\}$, on suppose que, pour tout $n \geq 0$ tel que $P(X_n = i) \neq 0$, la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ (probabilité que le pion soit sur la case j à l'instant $n + 1$ sachant qu'il est sur la case i à l'instant n) est égale à π_{ij} .

On note, pour tout $n \geq 0$,

$$p_n = P(X_n = 1), \quad q_n = P(X_n = 2), \quad r_n = P(X_n = 3), \quad s_n = P(X_n = 4).$$

Enfin on suppose que le pion est sur la case 1 à l'instant $n = 0$ et donc que $p_0 = 1$. Si le pion vient sur la case 4 à l'instant $n > 0$, il y reste à l'instant $n + 1$, d'où la quatrième ligne de la matrice Π .

1. Calculer p_1, q_1, r_1, s_1 et p_2, q_2, r_2, s_2 .
2. (a) Donner, pour tout entier $n \geq 0$, l'expression de $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, s_{n+1}$ en fonction de p_n, q_n, r_n, s_n .
(b) En déduire, pour $n \geq 1$, les expressions de p_n, q_n, r_n et s_n en fonction de n .
3. (a) Calculer, pour $n \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P(X_{n+l} = 4 | X_n \neq 4)$.
(b) Déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la probabilité que le pion passe par la case 4, pour la première fois, à l'instant n . On notera t_n cette probabilité.
(c) Déterminer la probabilité qu'il ne passe jamais par la case 4.
(d) Soit T une variable aléatoire définie sur (Ω, A, P) , à valeurs dans $\mathbb{N}^\times$ et vérifiant, pour tout entier $n \geq 1$, $P(T = n) = t_n$.
Calculer l'espérance et la variance de T .
4. Calculer la probabilité que le pion ne passe jamais ni par la case 2 ni par la case 3.
5. (a) Déterminer la probabilité que le pion se soit trouvé sur la case 1 à l'instant $n = 1$, sachant qu'il est sur la case 4 à l'instant $n = 2$.
(b) Plus généralement, soit m et n deux entiers vérifiant $0 < m < n$. Déterminer la probabilité que le pion se soit trouvé sur la case 1 à l'instant m , sachant qu'il est sur la case 4 à l'instant n .