CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On considère une population d'environ 10 000 consommateurs, dont chacun est susceptible d'acheter une voiture, soit de marque étrangère, soit de marque française. Un organisme de sondage interroge 100 consommateurs pris au hasard : 30 se révèlent préfèrer une marque étrangère (donc 70 une marque française). L'enquète est publiée et influence parfaitement -cas d'école- la population dont 30% penche maintenant pour une marque étrangère (70% pour une marque française). Un nouveau sondage est effectué : un échantillon de 100 consommateurs pris au hasard est interrogé, et le résultat publié influence parfaitement la population qui s'aligne sur les préférences de l'échantillon. On recommence le tirage au hasard de 100 consommateurs, et ainsi de suite. Que se passe-t-il après un grand nombre de sondages ?

L'énnoncé théorique ci-dessous propose un modèle probabiliste pour répondre à cette question.

Définition.

Soit une variable aléatoire X ; on note $E(X)$ l'espérance de X si celle-ci existe.

On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0, \dots, N\}$?. On pose $p = \dfrac{k_0}{N}$ et $q = 1 - p$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, A, p) , à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante :

X_0 est la variable certaine égale à k_0

X_1 suit la loi binômiale de paramètres N et p (Par convention, on dit que la loi binômiale de paramètres N et 0 est la loi de la variable aléatoire certaine égale à 0 et que la loi binômiale de paramètres N et 1 est la loi de la variable aléatoire certaine égale à N)

Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,\ldots,N\}$ tel que $p(X_n = k) \neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n = k)$ est la loi binômiale de paramètres N et $\frac{k}{N}$. En d'autres termes :

Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,\ldots,N\}$ tel que $p(X_n = k) \neq 0$, et pour tout i de $\{0,\ldots,N\}$,

$$p(X_{n+1} = i/X_n = k) = C_n^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} \text{(avec la convention habituelle } 0^0 = 1)$$

On a de plus l'hypothèse (H) : pour tout entier n non nul, pour tout n-uplet $(k_1,\ldots,k_n)$ de $\{0,\ldots,N\}^n$ tel que $p(X_n = k_n,\ldots,X_1 = k_1) \neq 0$, pour tout entier i de $\{0,\ldots,N\}$,

$$p(X_{n+1} = i/X_n = k_n,\ldots,X_1 = k_1) = p(X_{n+1} = i/X_n = k_n)$$

Cette hypothèse n'est utile qu'à la question 8. de la partie 2.

On définit la suite de variable aléatoires $(F_n)_{n\geqslant 0}$ par $F_n = \frac{X_n}{N}$

L'énnoncé ci-dessous propose une étude des cas $N = 2$ et $N = 3$. les propriétés mises en évidence pâr cette étude peuvent se généraliser à une valeur quelcconque de N.

Préliminaire

Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N la taille de l'échantillon, k_0 le nombre de consommateurs interrogés la première fois et favorables à l'achat d'une marque étrangère, n le rang du sondage, donner une interprétation de la variable X_n et justifier par des arguments tirés du cours, l'utilisation de la loi binômile. Comment interprèter l'hypothèse (H) ?

Partie 1

Dans cette partie, N=2.

1. (a) On suppose que $k_0 = 0$. Déterminer la loi de X_1.
   Que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$?
   (b) De même si $k_0 = 2$, que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$?

   On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$

2. (a) Montrer que, pour tout entier n, $p(X_n = 1) = \frac{1}{2^n}$
   En déduire que pour tout entier n, $p(X_n = 0) = p(X_n = 2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$
   (b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite ?
   (c) Calculer $E(X_n)$

3. On définit la variable aléatoire T par :
   - si pour tout entier n, $(X_n = 1)$ alors $T = 0$
   - sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 2)$.

   (a) Montrer que, pour tout entier n non nul, $p(T = n) = p(X_{n-1} = 1) - p(X_n = 1)$. Que vaut $p(T = 0)$?
   (b) Reconnaitre la loi de T et déterminer $E(T)$

Partie 2

Dans cette partie , $N = 3$.

1. Que dire de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ si $k_0 = 0$? Si $k_0 = 3$?
   On suppose désormais, dans la suite de cette partie que $k_0 = 1$.

2. Etant donné unentier n, déterminer $p(X_{n+1} = 0)$ en fonction des valeurs de $p(X_n = k)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$
   Déterminer de même $p(X_{n+1} = 1)$, $\quad p(X_{n+1} = 1)$ et $p(X_{n+1} = 3)$

   Pour tout entier n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} p(X_n = 0) \\ p(X_n = 1) \\ p(X_n = 2) \\ p(X_n = 3) \end{pmatrix}$. Vérifier que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$

3. (a) Soit le vecteur ligne $V = (0, 1, 2, 3)$. Calculer VA.
   (b) Montrer que $E(X_n) = VU_n$ pour tout entier n. En déduire la valeur de $E(X_n)$

4. (a) Soit le vecteur ligne $W = (0, 2, 2, 0)$. Calculer WA
   (b) Soit n un entier naturel. Montrer que $E(X_n(3 - X_n)) = WU_n$. en déduire que $E(X_n(3 - X_n)) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$
   (c) En déduire que pour tout entier n, $p(X_n = 1) + p(X_n = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (d) A l'aide de 3. et de 4.c, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p(X_n = i)$ pour tout entier i de $\{0, 1, 2, 3\}$.
   (e) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi .. Quelle est la limite ?
   (f) Déterminer le premier entier n tel que $p(F_n = 0 \text{ ou } F_n = 1) > 0,95$.

5. (a) On pose $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   Monter que Y_2 et Y_3 sont colonnes propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ?
   (b) Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$, formée de vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ?
   En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
   (c) Calculer A^n pour tout entier n.

6. (a) Monter que la loi de X_n est donnée par :
   $p(X_n = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n \qquad p(X_n = 0) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$
   $p(X_n = 0) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) \qquad p(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n$
   (b) Retrouver le résultat du **4.e)**

7. On définir la variable aléatoire T par :
   - si pour tout entier n, $(X_n \neq 0)$ et $(X_n \neq 3)$, alors $T = 0$
   - sinon, $T = n$ où n ets le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 3)$

   On pose pour tout entier n, $v_n = p(X_n = 1) + p(X_n = 2)$

(a) Montrer que pour tout entier n non nul, $p(T = n) = v_{n-1} - v_n$. Que vaut $p(T = 0)$?

(b) Reconnaitre la loi de T et donner $E(T)$

8. Pour tout entier n non nul, on définit l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant 1)$

   On pose $x_1 = p(X_1 = 0)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $x_k = p(X_1 = 1, \dots, X_{k-1} = 1, X_k = 0)$, et pour tout entier k non nul, $y_k = p(X_1 = 1, \dots, X_{k-1} = 1, X_k = 1)$

   (a) Exprimer pour tout entier k non nul, x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de y_k. En déduire les valeurs de x_n et y_n pour tout entier n non ul.

   (b) Montrer que $p(B_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k + y_n$. En déduire $p(B_n)$ et la limite de la suite $(p(B_n))_{n \geqslant 1}$

   (c) En déduire la probabilté qu'il existe un entier n vérifiant $F_n \geqslant 0,5$