CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1995

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

Soit A la matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 6 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et soit n un entier, strictement positif, fixé.

Cet exercice a pour but de déterminer toutes les matrices X de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant l'équation

$$(*) \qquad X^n = A^n.$$

On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et par ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans cette base.

1. (a) Déterminer l'image par ϕ du vecteur $(-2e_1 + e_2 + 2e_3)$.
   (b) Déterminer le noyau de ϕ.
   (c) Montrer que 2 est une valeur propre de ϕ et déterminer le sous-espace propre associé.
   (d) Montrer que la matrice A est diagonalisable.
   (e) Déterminer les valeurs propres de la matrice A^n.

2. (a) Montrer que si l'équation (*) admet une solution X, alors $XA^n = A^nX$.
   (b) En déduire que si (f_1, f_2, f_3) est une base formée de vecteurs propres de A, c'est aussi une base de vecteurs propres de X.
   (c) Déterminer une matrice Q telles que les matrices $Q^{-1}AQ$ et $Q^{-1}XQ$ soient toutes les deux diagonales.

3. (a) Si n est un nombre impair, déterminer toutes les solutions de (*).
   (b) Si n est un nombre pair, déterminer toutes les solutions de (*).

EXERCICE II

Soit f la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par la relation

$$f(t) = \frac{e^t}{t}$$

1. (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante.
   (b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel non nul n,

$$\frac{e^n}{n} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\ dt \leqslant \frac{e^{n+1}}{n+1}$$

   Montrer que l'équation

$$\frac{e^x}{x} = \int_n^{n+1} f(t)\ dt$$

   admet une solution et une seule dans l'intervalle $[n; n+1]$. On notera u_n cette solution, ce qui définit une suite $(u_n)_{n>0}$.

2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul p,

$$0 \leqslant \int_1^2 f(t)\ dt - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f(1+\frac{k}{p}) \leqslant \frac{1}{p}\,[f(2) - f(1)]$$

   (b) En utilisant la méthode des rectangles, donner une valeur approchée à 0,1 près de l'intégrale $\int_1^2 f(t)\ dt$.
   En déduire une valeur approchée de u_1 à 0,1 près.

3. (a) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$$

   (b) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t^2}\ dt}{\int_n^{n+1} \frac{e^t}{t}\ dt} = 0$$

   A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} (u_n - n) = \ln{(e-1)}$$

EXERCICE III

La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1 dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. La roue est lancée dans le sens trigonométrique. L'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire qu'on note U et qui est supposée suivre une loi exponentielle de paramètre λ, de densité la fonction valant $\lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geqslant 0$ et 0 si $x < 0$.
La roue porte une marque M qui, au départ, est située au point de coordonnées $(1, 0)$ et qui, après l'arrêt de la roue, est située au point de coordonnées

$$X = \cos U \qquad Y = \sin U$$

1. (a) On admet (la justification n'est pas demandée) que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \cos u \; e^{-\lambda u} du \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \sin u \; e^{-\lambda u} du$$

sont absolument convergentes et on se propose de les calculer.
Pour cela on pose, pour $\lambda > 0$ et $T > 0$:

$$I(T) = \int_0^{T} \cos u \; e^{-\lambda u} du \qquad \text{et} \qquad J(T) = \int_0^{T} \sin u \; e^{-\lambda u} du.$$

A l'aide d'intégrations par parties, établir les relations

$$I(T) = \sin T \; e^{-\lambda T} - \lambda \cos T \; e^{-\lambda T} + \lambda - \lambda^2 I(T)$$

$$J(T) = -\cos T \; e^{-\lambda T} + 1 - \lambda \sin T \; e^{-\lambda T} - \lambda^2 J(T)$$

(b) En déduire les limites de $I(T)$ et de $J(T)$ quand T tend vers $+\infty$.

(c) Calculer l'espérance des variables aléatoires X et Y en fonction du paramètre λ.

2. Un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la condition : $Y \geqslant \dfrac{1}{2}$.

(a) Pour quelles valeurs de U le joueur a-t-il gagné ?

(b) Calculer la probabilité $q(\lambda)$ que le joueur gagne.

(c) Montrer que, quand λ tend vers 0, $q(\lambda)$ a une limite que l'on déterminera.

3. On suppose dans cette question, pour simplifier, que $\lambda = 1$.

(a) Calculer les espérances de X^2, Y^2 et XY.

(b) Calculer, pour toute valeur du nombre réel a, la variance de la variable aléatoire

$$Z = X - aY$$

(c) Montrer qu'il existe une valeur de a, que l'on déterminera, pour laquelle la variance de Z est minimum.