



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT**  
Direction des Admissions et concours

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION ECONOMIQUE**

**MATHEMATIQUES III**

**Année 1993**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

## EXERCICE I

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions numériques définies et de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $F$  l'ensemble des éléments  $f$  de  $E$  tels que :

$$f'' - 3f' + 2f = 0$$

Soit  $F_0$  l'ensemble des éléments de  $F$  vérifiant en outre la relation  $f(0) = f'(0) = 0$ .

1. Montrer que  $F$  et  $F_0$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

2. Soit  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par les relations :

$$f_1(x) = e^x \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{2x}$$

Montrer que  $f_1$  et  $f_2$  sont des éléments de  $F$  linéairement indépendants.

3. Soit  $f$  un élément de  $F$ .

(a) Montrer qu'il existe un couple  $(a_1, a_2)$  et un seul de nombres réels tel que  $f - a_1 f_1 - a_2 f_2$  appartienne à  $F_0$ .

(b) Soit  $g_1$  et  $g_2$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par les relations :

$$g_1(x) = e^{-x}(f'(x) - 2f(x)) \quad \text{et} \quad g_2(x) = e^{-2x}(f'(x) - f(x)).$$

Montrer que ces fonctions sont constantes.

(c) En appliquant le résultat précédent, montrer que si  $f$  appartient à  $F_0$ , alors  $f = 0$ .

4. Soit  $\Phi$  l'application de  $F$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par la relation :

$$\Phi(f) = (f(0), f'(0)).$$

Montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme de l'espace vectoriel  $F$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## EXERCICE 2

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{1+x}$  et la fonction  $g$  définie sur  $]1, +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ .

L'objet de l'exercice est l'étude de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels déterminée par la condition initiale  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence, valable pour tout nombre entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{2n+1} &= f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} &= g(u_{2n+1}) \end{cases}$$

1. Justifier l'existence de  $(u_n)_{n \geq 0}$  et montrer que pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $u_{2n+1} > 1$  et  $u_{2n+2} > 0$ .
2. Montrer que les équations  $f(x) = x$  et  $g(x) = x$  ont une solution commune et une seule. On note  $\alpha$  cette solution.
3. Montrer que la fonction  $\varphi = f \circ g$  est définie et décroissante sur  $]1, +\infty[$ .  
Montrer que la fonction  $\psi = \varphi \circ \varphi$  est définie et croissante sur  $]1, +\infty[$ . Calculer  $\psi(\alpha)$ .
4. Montrer que, pour tout élément  $x$  de  $]1, \alpha[$  :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{x}{x-1}}}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1}} > x$$

5. Pour tout nombre entier naturel  $n$ , on pose  $v_n = u_{4n+1}$ .
  - (a) Montrer que  $v_0 < \alpha$ .
  - (b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = \psi(v_n)$ .
  - (c) A l'aide du résultat de la question 4, montrer que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est croissante et que, pour tout nombre entier naturel  $n$ ,
$$1 < v_n \leq \alpha.$$
  - (d) En déduire que la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$  est convergente et trouver sa limite.
6. On considère les trois suites  $(u_{4n+2})_{n \geq 0}$ ,  $(u_{4n+3})_{n \geq 0}$  et  $(u_{4n+4})_{n \geq 0}$ . Montrer que ces suites s'expriment simplement à l'aide de la suite  $(v_n)_{n \geq 0}$ . En déduire qu'elles sont convergentes et trouver leurs limites.
7. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est convergente et trouver sa limite.

## EXERCICE 3

L'objet de cet exercice est l'étude d'un exemple de discrétisation d'une variable aléatoire.

Pour tout nombre réel  $x$ , on note  $[x]$  sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand des nombres entiers inférieurs ou égaux à  $x$ . On note  $\{x\}$  la partie décimale de  $x$ , définie par :

$$\{x\} = x - [x]$$

**A.**

1. Représenter graphiquement les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$x \mapsto [x], \quad x \mapsto \{x\}, \quad x \mapsto [2x] \quad \text{et} \quad x \mapsto \{2x\}$$

2. Montrer que, pour tout nombre réel  $x : [2x] = [x] + [x + \frac{1}{2}]$

**B.**

Soit  $X$  une variable aléatoire positive admettant pour densité une fonction  $f$  continue sur  $[0, +\infty[$ . On note  $F$  la fonction de répartition de  $X$

1. Pour tout nombre entier naturel non nul  $n$ , exprimer à l'aide de  $f$  la densité de la variable aléatoire  $nX$ .
2. Pour tout nombre entier naturel  $k$ , exprimer à l'aide de  $f$  ou de  $F$  la probabilité que  $[X] = k$  (c'est-à-dire que la partie entière de  $X$  soit égale à  $k$ ).
3. Pour tout nombre entier naturel non nul  $n$ , exprimer à l'aide de  $f$  ou de  $F$  la loi de la variable aléatoire à valeurs entières  $[nX]$ .

**C.**

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif. On suppose maintenant que la fonction  $f$  est définie par les relations :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition et l'espérance de  $X$ .
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $[X]$ . De quelle loi s'agit-il ? Calculer l'espérance de  $[X]$ .
3. Pour tout nombre entier naturel non nul  $n$ , on considère la variable aléatoire réelle discrète  $Y_n = \frac{1}{n}[nX]$ . Trouver l'espérance  $m_n$  de  $Y_n$ . Montrer que la suite  $(m_n)_{n \geq 1}$  est convergente et trouver sa limite.
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle  $\{X\}$ . En déduire la densité de  $[X]$  et calculer son espérance.