CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Année 1988

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but du problème est l'étude des réalisations de trois «face » consécutifs dans une suite de parties de pile ou face, ce qui fait l'objet de la partie III. A cet effet, on s'intéresse d'abord dans la partie I aux puissances de deux matrices, puis, dans la partie II, au comportement asymptotique d'une suite.
La répétition d'un même événement dans une suite de tirages indépendants constitue un modèle commode pour l'étude de certains problèmes de gestion, notamment de réapprovisionnement des stocks.

PARTIE I

On considère les deux matrices M et N suivantes :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer M^2, M^3 et M^4. En déduire la relation :

$$(1) \qquad 4M^4 - 2M^3 - M^2 - M = O.$$

2. Calculer N^2, N^3 et N^4. En déduire la relation :

$$(2) \qquad 8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = O$$

PARTIE II

On étudie dans cette partie la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ telle que : $p_1 = p_2 = 0$ et $p_3 = \dfrac{1}{8}$, et vérifiant pour tout $n \geqslant 1$ la relation :

$$(3) \qquad 4p_{n+3} = 2p_{n+2} + p_{n+1} + p_n.$$

A cet effet, on considère la fonction f suivante, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 - x - 1.$$

1. (a) Etudier et représenter graphiquement la fonction f.

   (b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle et une seule, qu'on précisera.

2. A l'aide de la relation (3) définissant $(p_n)_n$, donner un algorithme permettant de calculer p_k pour $k \leqslant n$, et obtenir ainsi des valeurs approchées de p_k pour $k \leqslant 15$ (que l'on donnera avec quatre décimales). Que constate-t-on ?

3. Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant la relation suivante pour tout entier naturel non nul n :

$$4u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} + u_n.$$

   (a) On considère les trois suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$, $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(z_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$x_n = 1, \quad y_n = \frac{1}{2^n}.\cos(\frac{2n\pi}{3}) \quad \text{et} \quad z_n = \frac{1}{2^n}.\sin(\frac{2n\pi}{3}).$$

   Montrer que ces trois suites appartiennent à E.

   (b) Déterminer les trois nombres réels α, β, γ tels que l'on ait pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$:

$$p_n = \alpha.x_n + \beta.y_n + \gamma.z_n.$$

   (c) Prouver que l'on a alors, pour tout entier naturel non nul n :

$$p_n = \alpha.x_n + \beta.y_n + \gamma.z_n.$$

   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et déterminer un réel k tel que l'on ait : $\left|p_n - \lim\limits_{n\to+\infty} p_n\right| \leqslant \dfrac{k}{2^n}$.
   Comparer aux résultats numériques obtenus dans la question 2.

PARTIE III

A.

On effectue une suite infinie de pile ou face avec une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n , on considère la variable aléatoire Y_n prenant pour valeur :

- 0 si le $n^{ième}$ jet a amené «pile»,
- 1 si le $n^{ième}$ jet a amené «face», celui-ci étant le premier, ou le quatrième, ou le septième, ... ou le $(3k+1)^{ième}$ ... «face» obtenu depuis le précédent «pile» (ou depuis le début du jeu si «pile» n'est pas encore sorti);
- 2 si le $n^{ième}$ jet a amené «face», celui-ci étant le deuxième, ou le cinquième, ou le huitième, ... ou le $(3k+2)^{ième}$ ... «face» obtenu depuis le précédent «pile» (ou depuis le début du jeu si «pile» n'est pas encore sorti);
- 3 si le n^{ième} jet a amené «face», celui-ci étant le troisième, ou le sixième, ou le neuvième, ... ou le $(3k+3)^{ième}$ ... «face» obtenu depuis le précédent «pile» (ou depuis le début du jeu si «pile» n'est pas encore sorti);

On dit qu'une série de trois «face» consécutifs s'achève à l'issue du n^{ième} jet si et seulement si l'événement $[Y_n = 3]$ est réalisé.

Exemple : Soit la suite de résultats(F désigne «face» et P désigne «pile») :

Numéro du jet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
Résultat	P	F	F	P	P	P	F	F	F	F	F	F	P	F	...

Alors : $Y_1 = 0$, $Y_2 = 1$, $Y_3 = 2$, $Y_4 = 0$, $Y_5 = 0$, $Y_6 = 0$, $Y_7 = 1$, $Y_8 = 2$, $Y_9 = 3$, $Y_{10} = 1$, $Y_{11} = 2$, $Y_{12} = 3$, $Y_{13} = 0$, $Y_{14} = 1$, ... et trois «face» consécutifs ont été obtenus aux $9^{ème}$, $12^{ème}$, ... jets.

1. Exprimer, pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$, les probabilités $P([Y_{n+1} = i])$ en fonction des probabilités $P([Y_n = j])$ pour $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$.
2. On pose $a_n = P([Y_n = 0])$, $b_n = P([Y_n = 1])$, $c_n = P([Y_n = 2])$ et $d_n = P([Y_n = 3])$.

   Pour tout entier naturel non nul n, soit V_n la matrice-colonne définie par : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $V_{n+1} = M.V_n$, où la matrice M est définie dans la partie I.

   (b) En multipliant à droite la relation (1) par V_{n-1} (où $n \geqslant 2$), établir une relation entre V_{n+3} , V_{n+2} , V_{n+1} et V_n , puis entre d_{n+3} , d_{n+2} , d_{n+1} et d_n.

   (c) Calculer d_1, d_2, d_3 et d_4.

   (d) Comparer la suite (d_n), probabilité pour que l'événement $[Y_n = 3]$ soit réalisé, à la suite (p_n) étudiée dans la partie II. En déduire $\lim_{n\to\infty} P([Y_n = 3])$.

B.

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire réelle X indiquant le numéro du jet où, pour la première fois, on a obtenu trois fois de suite le résultat «face».
Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire réelle Z_n :

- prenant pour valeur 3 si trois «face» consécutifs sont obtenus à l'issue du $n^{ème}$ jet ou ont été déjà obtenus à l'issue d'un jet antérieur.
- Prenant sinon pour valeur :
  - 0 si le $n^{ième}$ jet a amené «pile»;
  - 1 si le $n^{ième}$ jet a amené «face», ce face étant le premier obtenu depuis le précédent «pile» (ou depuis le début du jeu si «pile» n'est pas encore sorti);
  - 2 si le $n^{ième}$ jet a amené «face», ce face étant le second obtenu depuis le précédent «pile» (ou depuis le début du jeu si «pile» n'est pas encore sorti);

L'événement $[X \leqslant n]$ est donc réalisé si et seulement si l'événement $[Z_n = 3]$ est réalisé.

Exemple : En reprenant la suite de pile ou face donnée dans la partie III.A, on a : $X = 9$ et $Z_1 = 0$, $Z_2 = 1$, $Z_3 = 2$, $Z_4 = 0$, $Z_5 = 0$, $Z_6 = 0$, $Z_7 = 1$, $Z_8 = 2$, et pour $n \geqslant 9$, $Z_n = 3$.

1. Exprimer, pour $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$, les probabilités $P([Z_{n+1} = i])$ en fonction des probabilités $P([Z_n = j])$ pour $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ et $j = 3$.
2. On pose $a'_n = P([Z_n = 0])$, $b'_n = P([Z_n = 1])$, $c'_n = P([Z_n = 2])$ et $d'_n = P([Z_n = 3])$.

   Pour tout entier naturel non nul n, soit W_n la matrice-colonne définie par : $\begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \\ c'_n \\ d'_n \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $W_{n+1} = N.W_n$, où la matrice N est définie dans la partie I.

(b) En multipliant à droite la relation (2) par W_n , établir une relation entre W_{n+4}, W_{n+3}, W_{n+2}, W_{n+1} et W_n, puis entre d'_{n+4}, d'_{n+3}, d'_{n+2} , d'_{n+1} et d'_n.

(c) Calculer $P([X = 1])$, $P([X = 2])$, $P([X = 3])$ et $P([X = 4])$.
Montrer que pour $n \geqslant 2$: $P([X = n]) = d'_n - d'_{n-1}$.

(d) A l'aide de cette égalité et de la relation définissant (d'_n), donner un algorithme permettant de calculer $P([X = k])$ pour $k \leqslant n$.
Obtenir ainsi des valeurs approchées de $P([X = k])$ pour $k \leqslant 15$ (que l'on donnera avec six décimales) puis du quotient $\dfrac{P([X = k + 1])}{P([X = k])}$ (avec quatre décimales).
Que constate-t-on?