CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1987

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^n e^{-x} x^n dx$$

1. Calculer I_1 et I_2.
2. Montrer que :

$$I_n = e^{-n} n^n \int_0^n e^t (1 - \frac{t}{n})^n dt$$

3. (a) Montrer que, pour tout élément x de l'intervalle $[0, 1[$:

$$\ln(1-x) \leqslant -x - \frac{x^2}{2}$$

   (b) En déduire que, pour tout élément de l'intervalle $[0, n]$:

$$e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2/2n}$$

4. (a) Prouver que :

$$\frac{e^n}{n^n} I_n \leqslant \sqrt{2n} \int_0^{\sqrt{n/2}} e^{-u^2} du$$

(b) Montrer que, pour tout élément u de l'intervalle $[1, +\infty[$

$$e^{-u^2} \leqslant e^{-u}$$

En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{e^n}{n^{n+1}} I_n$.

EXERCICE 2

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 4.
On considère l'application f qui à tout élément P de E associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = (X-1)P'(X) - P(X)$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que f définit un endomorphisme de E.
2. On considère la base canonique $B = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ de E. Ecrire la matrice associée à f dans cette base.
3. Déterminer les éléments du noyau de f. En déduire le rang de f.
4. Déterminer les éléments de l'image de f.
5. On considère l'application $f^2 = f \circ f$.
   (a) Pour tout élément P de E, exprimer $f^2(P)$ à l'aide de P, P' et P''.
   (b) Ecrire la matrice associée à f^2 dans la base B.
   (c) Déterminer le noyau de f^2. En déduire le rang de f^2.

EXERCICE 3

Trois boules de couleurs différentes sont réparties dans deux urnes U_1 et U_2. On effectue une succession de tirages au hasard dans l'ensemble des couleurs; chaque couleur a la même probabilité d'être tirée et les tirages sont indépendants. A l'issue de chaque tirage, la boule dont la couleur a été tirée est changée d'urne.
On suppose que le nombre de boules situées dans l'urne U_1 avant le premier tirage est aléatoire et représenté par la variable aléatoire X_0. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note X_n le nombre de boules situées dans l'urne U_1 après le $n^{\text{ème}}$ tirage. Les variables aléatoires X_n, où $n \geqslant 0$, prennent leurs valeurs dans l'ensemble $I = \{0, 1, 2, 3\}$.

1. (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de I, calculer la probabilité conditionnelle p_{ij} pour que $X_1 = j$ sachant que $X_0 = i$. On écrira les résultats sous la forme d'une matrice $P = (p_{ij})$ et on vérifiera que, pour tout élément i de I,

$$\sum_{j=0}^{3} p_{ij} = 1$$

   (b) On suppose que la loi de probabilité de X_0 est une loi binomiale de paramètres $(3, \frac{1}{2})$, notée $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$. Quelle est la loi de probabilité de X_1 ?

2. (a) Expliquez pourquoi la probabilité conditionnelle que $X_2 = j$ sachant qeu $X_1 = i$ vaut encore p_{ij}.

(b) Pour tout couple (i,j) d'éléments de I, on note $p_{ij}^{(2)}$ la probabilité conditionnelle que $X_2 = j$ sachant que $X_0 = i$. Montrer que :

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{3} p_{ik}.p_{kj}$$

et en déduire les valeurs des nombres $p_{ij}^{(2)}$, où $(i,j) \in I^2$, qu'on écrira sous forme d'une matrice $P_2 = (p_{ij}^{(2)})$. Pour tout élément i de I, calculer $\sum\limits_{j=0}^{3} p_{ij}^{(2)}$

(c) La loi de X_0 étant encore la loi $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$, trouver celle de X_2.

3. Soit, pour tout nombre entier naturel non nul n, $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité conditionnelle que $X_n = j$ sachant que $X_0 = i$. Exprimer la matrice $P_n = (p_{ij}^{(n)})$ à l'aide de P. Trouver la loi de X_n, quand la loi de X_0 est $\mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$.

4. On note A_n l'évènement $(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, ..., X_{n-1} \neq 0, X_n = 0)$ et q_{in} la probabilité conditionnelle de A_n sachant que $X_0 = i$. Calculer, pour tout entier i de I, les valeurs de q_{in} pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.