



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT**  
Direction des Admissions et concours

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON  
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION ECONOMIQUE**  
**MATHEMATIQUES II**

**Année 1987**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

L'étude simultanée de deux variables statistiques  $X$  et  $Y$  a permis d'obtenir les trois observations suivantes :

$$(x_1 = 0, y_1 = 0), (x_2 = 1, y_2 = 1), (x_3 = -2, y_3 = 0)$$

Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, on représente ces trois observations par le nuage de points :

$$M_1(0, 0), M_2(1, 1), M_3 = (-2, 0)$$

## **PARTIE I**

L'objet de cette partie est d'étudier par différentes méthodes l'ajustement du nuage  $(M_1, M_2, M_3)$  par une droite. On désigne par  $\delta$  une direction donnée du plan et par  $D$  une droite non parallèle à  $\delta$  d'équation  $y = ax + b$ . On projette les points  $M_1, M_2, M_3$  sur  $D$  dans la direction  $\delta$ . On note  $m_1, m_2, m_3$  les points obtenus (pour  $1 \leq i \leq 3$ ,  $m_i$  est donc l'intersection de la droite  $D$  avec la droite de direction  $\delta$  passant par  $M_i$ ).

1. Dans cette question, la direction  $\delta$  est celle de l'axe des ordonnées  $Oy$ . On cherche la droite  $D$  rendant minimale l'expression :

$$f(a, b) = M_1m_1 + M_2m_2 + M_3m_3$$

- (a) Calculer les distances  $M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3$ .

- (b) Le nombre réel  $b$  est fixé. En distinguant trois cas suivant la position de  $b$  par rapport à  $\frac{2}{3}$ , représenter graphiquement la fonction  $\varphi$  définie par la relation :

$$\varphi(x) = |2x - b| + |x + b - 1|$$

Montrer qu'elle passe par un minimum pour  $x = \frac{b}{2}$ .

- (c) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple  $(a_1, b_1)$  conduisant à la plus petite valeur possible pour  $f(a, b)$ . Tracer la droite  $D_1$  d'équation  $y = a_1x + b_1$ .
2. Dans cette question, la direction  $\delta$  est encore celle de l'axe des ordonnées. On cherche la droite  $D$  rendant minimale l'expression :

$$g(a, b) = \sup(M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3)$$

où  $\sup(M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3)$  désigne le plus grand des trois nombres réels :  $M_1m_1, M_2m_2, M_3m_3$ .

- (a) Représenter graphiquement sur une même figure :

- l'ensemble  $E_1$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $|y| \leq \frac{1}{3}$  ;
- l'ensemble  $E_2$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $|y - 2x| \leq \frac{1}{3}$  ;
- l'ensemble  $E_3$  des points  $M(x, y)$  du plan tels que  $|x + y - 1| \leq \frac{1}{3}$ .

En déduire l'ensemble  $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ .

- (b) En déduire l'existence et l'unicité d'un couple  $(a_2, b_2)$  conduisant à la plus petite valeur possible pour  $g(a, b)$ . Tracer la droite  $D_2$  d'équation  $y = a_2x + b_2$ .
3. Dans cette question, la direction  $\delta$  est toujours celle de l'axe des ordonnées. On cherche la droite  $D$  rendant minimale l'expression :

$$h(a, b) = (M_1m_1)^2 + (M_2m_2)^2 + (M_3m_3)^2$$

Le nombre réel  $a$  étant fixé, montrer que la fonction  $b \mapsto h(a, b)$  admet un minimum en un point unique que l'on précisera.

En déduire l'existence et l'unicité d'un couple  $(a_3, b_3)$  conduisant à la plus petite valeur possible pour  $h(a, b)$ . Tracer la droite  $D_3$  d'équation  $y = a_3x + b_3$ . Quelle est la droite  $D_3$  ainsi obtenue ?

4. Dans cette question,  $m$  est un nombre réel donné et l'on suppose  $a \neq m$ . La direction  $\delta$  est celle de la droite d'équation  $y = mx$ . On cherche la droite  $D$  rendant minimale l'expression :

$$h_m(a, b) = (M_1m_1)^2 + (M_2m_2)^2 + (M_3m_3)^2$$

- (a) Calculer les coordonnées de  $m_1, m_2, m_3$ . Exprimer  $h_m(a, b)$  en fonction de  $a, b$  et  $m$ .

- (b) Le nombre  $m$  est fixé et différent de  $\frac{2}{7}$ .

Le nombre réel  $a$  étant donné, pour quelle valeur de  $b$  la fonction  $b \mapsto h_m(a, b)$  est-elle minimale ? En déduire que  $h_m(a, b)$  prend la plus petite valeur possible lorsque la fonction  $\theta$  définie par :

$$\theta(a) = \frac{7a^2 - 4a + 1}{(a - m)^2}$$

est minimale. Etudier la variation de la fonction  $\theta$ .

En déduire l'existence et l'unicité d'un couple  $(a_4, b_4)$  conduisant à la plus petite valeur possible pour  $h_m(a, b)$ . (On explicitera  $a_4$ , et  $b_4$  en fonction de  $m$ )

- (c) Etudier l'existence d'une telle droite  $D_4$  dans le cas où  $m = \frac{2}{7}$ .

## PARTIE II

Dans toute la suite,  $M_0(x_0, y_0)$  désigne un point du plan associé à une observation supplémentaire des variables statistiques  $X$  et  $Y$ , et l'on étudie les modifications apportées par ce nouveau point au coefficient de corrélation et à la droite de régression de  $Y$  par rapport à  $X$  du nuage  $(M_1, M_2, M_3)$ .

1. Soient  $\rho$  et  $\rho(M_0)$  les coefficients de corrélation respectivement associés aux nuages  $(M_1, M_2, M_3)$  et  $(M_0, M_1, M_2, M_3)$ .

(a) Calculer  $\rho$  en précisant les formules utilisées.

(b) Calculer  $\rho(M_0)$  en fonction de  $x_0$  et  $y_0$ .

- (c) Pour tout nombre réel  $k$ , on considère les points  $E_k$  et  $F_k$  de coordonnées respectives  $(5 + k, k)$  et  $(5 + k, -k)$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les fonctions qui associent respectivement au nombre réel  $k$  les nombres  $\rho(E_k)$  et  $\rho(F_k)$ .

Montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . Calculer  $\alpha(0)$  et  $\beta(0)$ . Déterminer les limites lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  de  $\alpha(k)$  et de  $\beta(k)$ .

En déduire que, pour tout nombre réel  $r$  appartenant à l'intervalle  $] -1, 1[$ , il existe au moins un point  $M_0$  tel que  $\rho(M_0) = r$ .

Existe-t-il un point  $M_0$  tel que  $\rho(M_0) = 1$  ou tel que  $\rho(M_0) = -1$  ?

2. Soit  $D$  une droite d'équation  $y = ax + b$ .

(a) On suppose que  $3b - a - 1 \neq 0$ . Montrer qu'il existe un point  $M_0$  et un seul tel que la droite de régression  $\Delta$  du nuage  $(M_0, M_1, M_2, M_3)$  de  $Y$  par rapport à  $X$  soit  $D$ .

(b) On suppose que  $3b - a - 1 = 0$  et que  $(a, b) \neq \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$ . Montrer qu'il n'existe aucun point  $M_0$  tel que  $\Delta = D$ .

(c) On suppose que  $(a, b) = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right)$ . Déterminer l'ensemble des points  $M_0$  tels que  $A = D$ .

Retrouver ce résultat sans calcul.