CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1986

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres λ et μ de M; on notera λ celle de ces valeurs propres qui a la plus grande valeur absolue. Montrer que $\lambda\mu = -1$.
   Pour tout nombre entier naturel non nul n, calculer la matrice M^n.

2. Soit (u_n) une suite de nombres réels. Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

   $$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

   Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.

   (a) Pour tout nombre entier naturel n

   $$(1) \qquad u_{n+2} = 10u_{n+1} + u_n$$

   (b) Pour tout entier naturel n,

   $$(2) \qquad X_{n+1} = MX_n$$

3. Soit α un nombre réel. On note $(u_n(\alpha))$ l'unique suite satisfaisant aux conditions équivalentes précédentes et telle que $u_0(\alpha) = 1$ et $u_1(\alpha) = \alpha$.
   Exprimer $u_n(\alpha)$ en fonction de α, λ, μ et n.

4. Montrer que la suite $(u_n(\alpha))$ est convergente si et seulement si $\alpha = \mu$; déterminer alors la limite de cette suite.

5. Soit μ' une valeur décimale approchée de μ à la précision 10^{-p}, où $p \in \mathbb{N}^{\times}$. Autrement dit, $\mu' = \mu + \delta$, où $|\delta| \leqslant 10^{-p}$. On se propose d'examiner si $u_n(\mu')$, que l'on calcule par récurrence (à l'aide d'une calculatrice) grâce à la relation (1), fournit une bonne approximation de $u_n(\mu)$.

   (a) Dans cette question, on prend $\mu' = -\ 0{,}099\ 02$ (valeur approchée de μ à la précision 10^{-4}). A l'aide de la calculatrice, calculer $u_n(\mu')$ pour $2 \leqslant n \leqslant 10$. Exprimer d'autre part $u_n(\mu)$ en fonction de λ et de n; A partir de cette relation, calculer les valeurs décimales approchées de $u_n(\mu)$ pour $2 \leqslant n \leqslant 10$.

   (b) Exprimer $u_n(\mu') - u_n(\mu)$ en fonction de δ, λ, μ et n. En déduire l'ordre de grandeur de $u_{10}(\mu') - u_{10}(\mu)$ lorsqu'on prend μ' la valeur approchée définie au a).
   Expliquer ainsi le phénomène observé à la question a).

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel non nul n, on note f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$$

1. Etudier la variation de la fonction f_n.

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution u_n et une seule.

3. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n).

   (a) En étudiant le signe de $f_n(n)$, montrer que $u_n > n$. En déduire la limite de la suite (u_n).

   (b) Montrer que $f_n(n+1)$ est positif à partir d'un certain rang. En déduire la limite de $\dfrac{u_n}{n}$.

   (c) Montrer que :
   $$\lim_{n \to +\infty} (u_n - n) = 0$$
   (On pourra étudier le signe de $f_n(n+\varepsilon)$ où ε est un nombre réel strictement positif.)

4. On se propose d'étude la suite de terme général $a_n = u_n - n$. Expliciter la relation $f_n(n + a_n) = 0$. En déduire la limite de $\dfrac{e^n}{n} a_n$.

EXERCICE 3

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note I l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I. Pour tout entier i de I, on note p_i la probabilité que X prenne la valeur i; on suppose que $p_i > 0$.
On pose enfin :

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{1}{p_i}.$$

1. Montrer que la quantité $H(X)$ est strictement positive. Quelle est sa valeur lorsque X suit une loi uniforme sur I ?

2. Soit $(q_1, q_2, ..., q_n)$ une suite de n nombres réels strictement positifs telle que $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1$.

(a) Vérifier que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$\ln x \leqslant x - 1$$

(b) En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leqslant 0$$

Dans quel cas le premier membre est-il nul ?

(c) Montrer que $H(X) \leqslant \ln n$. Caractériser le cas où il y a égalité.

3. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $I \times I$. Pour tout élément (i, j) de $I \times I$. On note r_{ij} la probabilité que X prenne i et Y la valeur j; on suppose que $r_{ij} > 0$. On note respectivement $(p_i)_{i \in I}$ et $(q_j)_{j \in I}$ les lois marginales de X et de Y. On pose :

$$H(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \ln \frac{1}{r_{ij}}.$$