CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1983

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER EXERCICE

On considère deux verres A et B de volume unité, pleins à ras bord, le premier d'eau, le second d'alcool pur. On dispose en outre d'un flacon F pour faire les mélanges.

1. (a) On verse dans F, d'une part le volume $\dfrac{1}{n}$ du contenu de A (où n est un entier naturel non nul), d'autre part tout le contenu du verre B. Après mélange, on remplit B avec le contenu de F. L'excédent de liquide resté dans F, de volume $\dfrac{1}{n}$, est jeté.
   Quel est le volume $q_n(1)$ d'alcool se trouvant dans le verre B à l'issue de cette opération (a) ?

   (b) On répète k fois l'opération (a) ($k \leqslant n$), en tirant à A à chaque fois un volume $\dfrac{1}{n}$.
   Quel est le volume $q_n(k)$ d'alcool se trouvant dans le verre B à l'issue de la $k^{\text{ème}}$ opération (a) ?

   (c) On pose $q_n = q_n(n)$. Montrer que la suite (q_n) admet une limite q.

   (d) Calculer la précision de 10^{-3} de combien q est inférieur à $q_1(1)$.
   Par commodité de langage, on parlera dans la suite de "versement goutte à goutte d'un verre sur un autre" (goutte $\dfrac{1}{n}$ aussi petite qu'on le veut) pour désigner à la limite le processus décrit en 1. Ainsi le versement goutte à goutte du verre d'eau A sur le verre d'alcool B produit dans B le mélange des volumes $1-q$ d'eau et q d'alcool, comme il a été calculé ci-dessus. (On se tiendra à l'écart de toute discussion relative à la physique des liquides)

2. (a) Le verre A est plein d'eau, le verre B plein du mélange des volumes P_0 d'eau et q_0 d'alcool ($p_0 + q_0 = 1$) Quel est l'effet du versement goutte à goutte de A sur B ?
   (b) Le verre A est plein d'alcool, le verre B plein du mélange des volumes P_0 d'eau et q_0 d'alcool. Quel est l'effet du versement goutte à goutte de A sur B ?
   (c) Sur le verre B dans l'état initial (p_0, q_0) on verse goutte à goutte un verre d'eau, puis un verre d'alcool. Exprimer le volume p_1 d'eau obtenu dans B, en fonction de p_0.
   On note f la fonction ainsi définie $f : p_0 \mapsto p_1$. Tracer dans un repère orthonormé les représentations graphiques des fonctions f et $I : p_0 \mapsto p_0$.
   (d) Que devient le mélange du verre B si on itère la double opération du versement goutte à goutte sur B d'un verre d'eau et d'un verre d'alcool ?

DEUXIEME EXERCICE

Soit k un nombre réel.
On considère la suite réelle (u_n) définie par la donnée de ses premiers termes :

$$u_0 = 2k, \quad u_1 = 1 + k$$

et par la relation de récurrence :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + (k^2 - \frac{1}{4})u_n.$$

1. Calculer u_n en fonction de n, suivant les valeurs de k.
2. Déterminer la limite, lorsqu'elle existe de u_n quand n tend vers $+\infty$. Ici encore on discutera suivant les valeurs de k.

TROISIEME EXERCICE

Soient n un entier naturel non nul et f une fonction numérique n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue. Soit $(a_0, a_1, ..., a_n)$ une suite strictement croissante de réels. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_0)(X - a_1)\cdots(X - a_n)$$

Pour tout entier naturel k tel que $k \leqslant n$, on note A_k le polynôme défini par

$$A_k(X) = \frac{P(X)}{X - a_k}$$

1. Exprimer $A_k(a_k)$ à l'aide de la dérivée de P.
2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(a_k)\frac{A_k(x)}{A_k(a_k)}.$$

   (a) Calculer les nombres $g(a_0)$, $g(a_1)$, ..., $g(a_n)$.
   (b) Montrer qu'il existe un élément λ de $]a_0, a_n[$ tel que :

$$f^{(n)}(\lambda) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{f(a_k)}{A_k(a_k)}.$$

   (c) Montrer qu'il existe un élément x_1 de $]a_0, \lambda[$ et un élément x_2 de $]\lambda, a_n[$ tels que :

$$f^{(n-1)}(x_2) - f^{(n-1)}(x_1) = (x_2 - x_1)f^{(n)}(\lambda)$$

3. On considère le cas particulier suivant :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}x) \\ n & = & 2, \quad a_0 = -1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \end{array}$$

   (a) Expliciter g.

   (b) Calculer $\frac{\pi^2}{16}\cos(\frac{\pi}{4}\lambda)$.

QUATRIEME EXERCICE

Soit $(X_n,\ n \geqslant 1)$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que ces variables suivant toutes la même loi de Bernouilli de paramètre p :

$$P(X_n = 1) = p \qquad P(X_n = 0) = 1 - p, \qquad 0 < p < 1.$$

On construit la suite $(Y_n,\ n \geqslant 1)$ de variables aléatoires de la façon suivante :

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = Y_1 X_2, ..., \quad Y_n = Y_{n-1} X_n, ...$$

Y_n est la variable aléatoire produit des variables Y_{n-1} et X_n.
On suppose que pour tout entier $n \geqslant 2$ les variables aléatoires Y_{n-1} et X_n sont indépendantes.

1. Déterminer, pour tout $n \geqslant 1$, la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n.
   Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y_n.

2. Trouver, pour tout $n \geqslant 1$, la loi de probabilité conjointe de la variable aléatoire à deux dimensions (X_n, Y_n).
   Calculer la covariance de X_n et Y_n.

3. Déterminer, pour tout $n \geqslant 1$, les lois de probabilité conditionnelles de X_n sachant Y_n prend la valeur 0, et de X_n sachant que Y_n prend la valeur 1.

4. La suite des variables aléatoires $(Y_n,\ n \geqslant 1)$ converge-t-elle en probabilité quand n tend vers l'infini ? Si oui, vers quelle limite ?

- FIN -